

**F. Brezzi**

## **METODI AGLI ELEMENTI FINITI DISCONTINUI**

### **1. Introduzione**

In questa nota, di carattere sostanzialmente divulgativo, vogliamo richiamare le caratteristiche più salienti del metodo degli Elementi Finiti Discontinui, che, in questi tempi, è un argomento di ricerca molto studiato (stanno per uscire *due* numeri speciali, uno del *Journal of Scientific Computing* ed uno di *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, dedicati espressamente a questo argomento).

A causa del già detto intento divulgativo, cominceremo col richiamare rapidamente il Metodo degli Elementi Finiti classico, accennando poi, sempre molto brevemente, ai casi in cui il metodo si rivela insoddisfacente (e che giustificano, in un certo qual senso, la scelta di battere altre piste studiando metodi alternativi).

Passeremo quindi brevemente a dare una idea della derivazione classica dei metodi discontinui, richiamando anche le notazioni, abbastanza recenti, che permettono una scrittura concisa ed un trattamento più agevole. Nel seguito, presenteremo un nuovo approccio per derivare metodi discontinui che permette di inquadrare i metodi finora introdotti in modo più omogeneo e semplice. Per maggiori dettagli su tale approccio (del tutto nuovo) rimandiamo al lavoro [15], di prossima pubblicazione.

Concluderemo con un breve excursus sul problema di cosa sia, precisamente, un metodo agli elementi finiti discontinui *stabilizzato*. Alla luce dell'ultima impostazione presentata il problema, parzialmente, si stempera, ed appare (come vedremo) pericolosamente vicino ad uno sterile nominalismo.

Una abbondante bibliografia, contenente anche numerosi articoli non citati nel testo, completa il lavoro.

### **2. Il metodo degli Elementi Finiti**

#### **2.1. Formulazioni Variazionali**

Cominciamo con qualche richiamo sulle cosiddette *formulazioni variazionali*. È ben noto che il problema

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

se, ad esempio,  $f$  è in  $L^2(\Omega)$ , è equivalente a

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

dove

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \text{ con } \nabla v \in (L^2(\Omega))^2 \text{ e } v = 0 \text{ su } \partial\Omega\}.$$

D'ora in poi, salvo avviso contrario, lo spazio  $H_0^1(\Omega)$  sarà sempre indicato con  $V$ .

Anche se nel seguito useremo sempre, per semplicità, condizioni ai limiti del tipo di Dirichlet (e spesso omogenee), diamo comunque un cenno anche al trattamento variazionale di condizioni ai limiti di tipo di Neumann.

Supponiamo che  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  e che le condizioni ai limiti siano

$$u = g_D \quad \text{su } \Gamma_D \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_N \quad \text{su } \Gamma_N.$$

Partendo da  $-\Delta u = f$ , moltiplicando per  $v$ , integrando su  $\Omega$  e poi integrando per parti, si ha in questo caso:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Se  $v = 0$  su  $\Gamma_D$ , il problema diventa: trovare  $u \in H_{D,g}^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma_N} g_N v \, ds + \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{D,0}^1(\Omega),$$

dove, per una generica  $g$ ,

$$H_{D,g}^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \text{ con } \nabla v \in (L^2(\Omega))^2 \text{ e } v = g \text{ su } \Gamma_D\}.$$

Naturalmente, se  $g$  è diversa da zero, e se si vuole che le *funzioni test* varino nello stesso insieme in cui si cerca la soluzione, bisognerà considerare una *soluzione particolare*  $u_g$  della equazione  $u = g_D$  su  $\Gamma_D$ ; dopo avere scritto

$$u = u_0 + u_g$$

il problema diventa allora: trovare  $u_0 \in H_{D,0}^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_N} g_N v \, ds + \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{D,0}^1(\Omega).$$

Passando dal caso più semplice dell'operatore di Laplace ad operatori più generali abbiamo ad esempio che il problema di *diffusione-trasporto*:

$$-\varepsilon \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

è equivalente a:  $u \in V$  e

$$(1) \quad \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V.$$

Similmente per un problema del tipo di Darcy, applicabile per esempio al *moto di fluidi in mezzi porosi*:

$$-\nabla \cdot (\kappa(x)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega; \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

si ha:  $u \in V$  e

$$\int_{\Omega} \kappa(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V.$$

Tutti i problemi precedenti possono essere scritti in un'unica forma:

$$(VP) \begin{cases} \text{trovare } u \in V \text{ tale che} \\ \mathcal{L}(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

dove  $(\cdot, \cdot)$  rappresenta il prodotto scalare in  $L^2$ , e  $\mathcal{L}$  può essere

$$\mathcal{L}(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V$$

nel caso dell'operatore di Laplace, oppure

$$\mathcal{L}(u, v) := \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u v \, dx \quad \forall u, v \in V$$

per l'equazione di diffusione-trasporto, o infine

$$\mathcal{L}(u, v) := \int_{\Omega} \kappa(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V$$

nel caso del problema di Darcy.

## 2.2. Il metodo di Faedo-Galerkin

Quando il problema è stato scritto in forma variazionale, il metodo di Faedo-Galerkin fornisce immediatamente una strada per ottenere delle discretizzazioni del problema stesso. Consideriamo infatti un sottospazio  $V_n \subset V$  a dimensione finita e con esso il problema:

$$(VP_n) \begin{cases} \text{trovare } u_n \in V_n \text{ tale che} \\ \mathcal{L}(u_n, v_n) = (f, v_n) \quad \forall v_n \in V_n. \end{cases}$$

Sotto ipotesi ragionevoli si può dimostrare che il problema  $(VP_n)$  ha soluzione unica, e stimare la distanza tra  $u$  e  $u_n$ .

Tale stima viene considerata *ottimale* se implica

$$(2) \quad \|u - u_n\|_V \leq C \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V$$

con una costante  $C$  che *non è troppo grossa*.

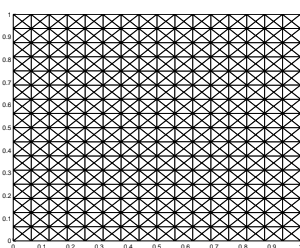
### 2.3. Il metodo degli elementi finiti

Il metodo degli Elementi Finiti non è altro che una particolare classe di possibili scelte per lo spazio  $V_n$  (che, nel metodo degli Elementi Finiti, viene solitamente chiamato  $V_h$ ).

Esso corrisponde a decomporre preventivamente il dominio  $\Omega$  in sottodomini (intervalli, triangoli, quadrilateri, tetraedri, pentaedri, esaedri, etc.). Tale decomposizione è solitamente indicata con  $\mathcal{T}_h$ . Poi si prende come  $V_h$  il sottospazio delle funzioni di  $V$  che sono polinomi “di grado massimo assegnato” in ciascuno dei sottodomini.

Vediamo in Figura 1 qualche esempio di decomposizione.

Decomposizione uniforme



Decomposizione non uniforme

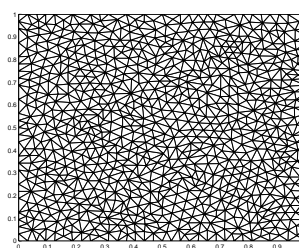
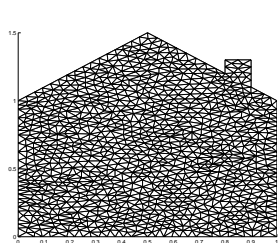


Figura 1

Naturalmente, come si evince facilmente, non ci sono problemi a decomporre dei domini di geometria più complessa, o ad avere decomposizioni che sono più fitte in certe regioni e meno fitte in altre. Si veda ad esempio la Figura 2

Decomposizione



Raffinamento locale

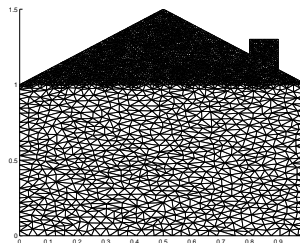


Figura 2

Nella successiva Figura 3 vediamo una tipica funzione di  $V_h$ , nel caso in cui si usino polinomi di grado minore o uguale a uno in ogni triangolo.

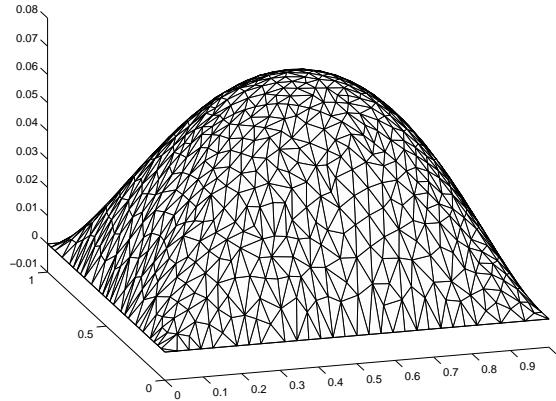


Figura 3

#### 2.4. La consistenza forte e le stima dell'errore

Dalle due formulazioni variazionali (continua e discreta)

$$\mathcal{L}(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \subset V$$

si ottiene subito, per differenza, la consistenza forte

$$(3) \quad \mathcal{L}(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Supponiamo che la forma bilineare  $\mathcal{L}$  verifichi

$$(4) \quad \exists \alpha > 0 \text{ t.c. } \mathcal{L}(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

$$(5) \quad \exists M > 0 \text{ t.c. } \mathcal{L}(u, v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

Allora la stima dell'errore segue banalmente. Infatti per ogni  $u_I \in V_h$  si ha, usando successivamente (4), (3) e (5):

$$\begin{aligned} \alpha \|u_I - u_h\|_V^2 &\leq \mathcal{L}(u_I - u_h, u_I - u_h) \\ &= \mathcal{L}(u_I - u, u_I - u_h) \leq M \|u - u_I\|_V \|u_I - u_h\|_V \end{aligned}$$

che implica immediatamente

$$\|u_I - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - u_I\|_V.$$

La stima della distanza tra  $u$  e  $u_h$  segue poi banalmente dalla disuguaglianza triangolare:

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right) \|u - u_I\|_V.$$

Dato che tutto questo vale per una  $u_I$  generica in  $V_h$ , possiamo passare all'estremo inferiore su  $V_h$  ed avere facilmente la stima (2).

## 2.5. Qualche difficoltà

Malgrado quello che vedrete tra poco, il metodo di Faedo-Galerkin (e in particolare il metodo degli Elementi Finiti) è, in generale, un ottimo metodo: robusto, molto duttile, e abbastanza accurato. Ma qui vogliamo parlare dei casi in cui il metodo incontra delle difficoltà.

Le cause classiche di fallimento, in problemi del tipo  $VP$  in cui (3),(4) e (5) sono soddisfatte (e quindi vale la stima (2)), rientrano per lo più in una delle seguenti tipologie:

- Un coefficiente è troppo piccolo e rende  $\alpha$  piccolo rispetto a  $M$
- Un coefficiente è troppo grosso e rende  $M$  grosso rispetto ad  $\alpha$
- I coefficienti hanno oscillazioni troppo rapide e quindi l' $inf$  che appare in (2) risulta molto grande anche per decomposizioni estremamente fini (e quindi estremamente costose).

Per semplicità ci occuperemo qui solo del primo caso, facendo riferimento al problema-giocattolo del trasporto passivo di uno scalare con eventualmente un termine di reazione ( $\varepsilon$ =diffusione,  $\beta$ =trasporto,  $\rho$ =reazione).

$$-\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \rho u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Vediamo, brevemente, il metodo al lavoro.

Per il problema monodimensionale  $-\varepsilon u'' + u' + 2u = 2$ , con  $\varepsilon = 10^{-1}$  e  $h = 10^{-2}$ , non ci sono problemi, come si vede nella Figura 4.

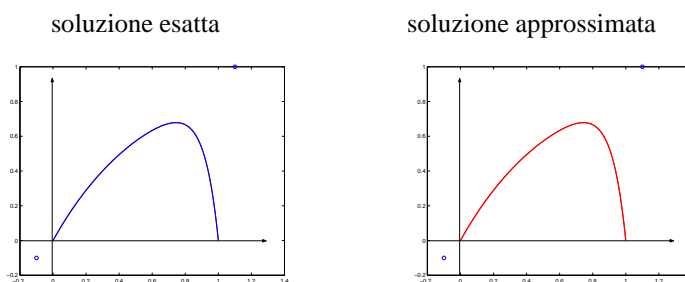


Figura 4

Ma se  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $h = 10^{-2}$  le cose vanno molto peggio (v. Figura 5).

In due dimensioni, le cose non migliorano. Nella Figura 6 abbiamo  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\beta = (1, 3)$  e  $\rho = 0$ , con  $h = 10^{-1}$ . Le condizioni ai limiti sono  $u = 1$  sul lato  $x = 0$  e sulla parte del lato  $y = 0$  dove  $x < 1/3$ , e invece  $u = 0$  altrove. La soluzione ha quindi uno strato limite interno lungo la linea  $y = 3x - 1$  ed uno strato limite di bordo per  $y = 1$  e  $x < 2/3$ . Si noti che nella parte sinistra della Figura 6 abbiamo rappresentato (vista in pianta) come *soluzione esatta* la soluzione limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  del problema, che in

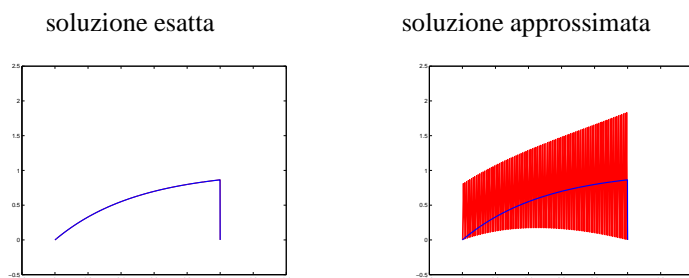


Figura 5

realtà differisce dalla vera soluzione esatta per una quantità dell'ordine di  $\varepsilon$  in  $L^1(\Omega)$ . Tale soluzione limite coincide con la funzione caratteristica della parte del quadrato  $\Omega$  dove  $y > 3x - 1$ . Sottolineiamo che il massimo della soluzione approssimata (nella parte destra della Figura 6) è  $1.08 \times 10^4$ .

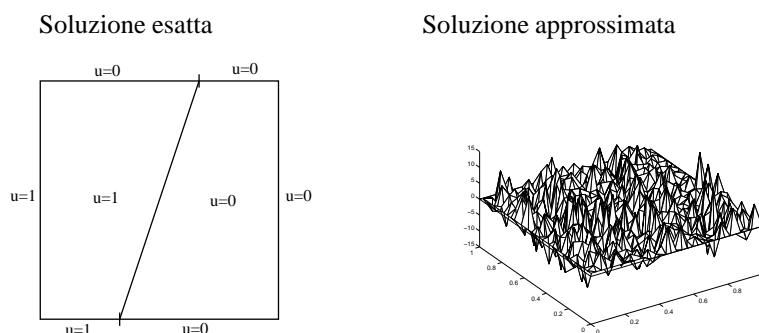


Figura 6

**2.6. Un rimedio classico: SUPG**

Naturalmente, esistono numerose vie d'uscita proposte da vari autori ed utilizzate nei codici di calcolo di uso corrente. Ad esempio per il problema di diffusione-trasporto, la correzione forse più classica è data dal metodo cosiddetto SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin). Senza entrare nel merito, ricordiamo che nel caso della equazione (1), discretizzata con elementi finiti continui e lineari a tratti, esso equivale a prendere

$$(6) \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u v dx + \sum_T \tau_T \int_T (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u - f) \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx = 0$$

dove, per ogni triangolo  $T$ , il parametro di stabilizzazione  $\tau_T$  va scelto opportunamente (si vedano ad es. [21], [38]).

### 3. Gli Elementi Finiti Discontinui

#### 3.1. Problemi iperbolici

Vediamo, per cominciare, l'idea di base per un problema iperbolico

$$(7) \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega^-$$

dove

$$(8) \quad \partial\Omega^- \equiv \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ t.c. } \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_{ext} < 0\} \quad \partial\Omega^+ \equiv \partial\Omega \setminus \partial\Omega^-.$$

La scelta di cominciare da un problema iperbolico è sostanzialmente dovuta a motivi

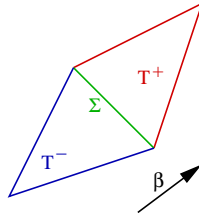


Figura 7

storici. Infatti è proprio per problemi iperbolici che gli elementi finiti discontinui sono stati sviluppati (v. [50]). Ed ancora oggi è questo il settore in cui sono più utilizzati. Per semplicità, limitiamoci al caso ipersemplificato in cui il trasporto  $\boldsymbol{\beta}$  sia costante, e il dominio  $\Omega$  sia suddiviso in *due* triangoli  $T^-$  e  $T^+$ , come in Figura 7. Poniamo anche

$$v_\beta \equiv \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v, \quad \beta_n^- = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}^-, \quad \beta_n^+ = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}^+,$$

dove  $\mathbf{n}^-$  e  $\mathbf{n}^+$  sono le normali esterne a  $T^-$  e a  $T^+$ , rispettivamente.

Moltiplichiamo l'equazione (7) per una  $v$  discontinua, integriamo su  $\Omega$  e poi integriamo per parti in ogni  $T$ .

$$-\sum_T \int_T u v_\beta \, dx + \int_{\partial T^-} u^- v^- \beta_n^- \, ds + \int_{\partial T^+} u^+ v^+ \beta_n^+ \, ds = \int_\Omega f v \, dx.$$

Adesso ricordiamo che, grazie a (7)-(8) si ha  $u = 0$  su  $\partial\Omega^-$  e che inoltre, per la regolarità della soluzione,  $u^- = u^+$  su  $\Sigma$ :

$$-\sum_T \int_T u v_\beta \, dx + \int_\Sigma u (v^- \beta_n^- + v^+ \beta_n^+) \, ds + \int_{\partial\Omega^+} u v \beta_n^+ \, ds = \int_\Omega f v \, dx.$$

Ma se vogliamo usare delle approssimanti discontinue anche per  $u$ , dobbiamo decidere che valore dare a  $u$  su  $\Sigma$ . La scelta *classica* ([50], [44]) è quella di prendere *il valore di  $u$  upwind (sopravento)*. Nel caso della Figura 7 questo corrisponde a prendere  $u = u^-$  su  $\Sigma$ .

### 3.2. Problemi ellittici

Vediamo ora l'idea di base per un problema ellittico.

$$\begin{cases} Au \equiv -\operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Se  $v$  è discontinua, su ogni triangolo  $T$  avremo

$$\int_T -\operatorname{div}(\kappa \nabla u) v \, dx = \int_T f v \, dx \quad \forall T \forall v$$

da cui

$$(9) \quad \int_T \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial T} \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n}_{ext} v \, ds = \int_T f v \, dx \quad \forall T \forall v.$$

E adesso dobbiamo sommare su tutti i triangoli.

### 3.3. Notazioni e formula fondamentale

Per trattare i (numerosi) termini di interfaccia che intervengono, in modo abbastanza sistematico, nella scrittura dei metodi discontinui, risulta particolarmente utile il seguente formalismo ([19],[20], [4]).

Sia  $\mathcal{T}_h$  una decomposizione di  $\Omega$  in elementi  $T$ , sia  $\mathcal{E}_h$  l'insieme dei lati di  $\mathcal{T}_h$  e sia  $\mathcal{E}'_h$  il sottoinsieme formato dai soli lati interni. Per una funzione  $v$ , discontinua da un triangolo all'altro ma regolare in ogni triangolo aperto, e per ogni funzione  $\boldsymbol{\tau}$ , a valori vettoriali e con la stessa regolarità, definiamo le *medie* e i *salto* su ogni interfaccia nel modo seguente (le notazioni sono quelle della Figura 8). Definiamo la media e il salto su un lato interno:

$$(10) \quad \begin{aligned} \{v\} &= \frac{v^+ + v^-}{2}; & \llbracket v \rrbracket &= v^+ \mathbf{n}^+ + v^- \mathbf{n}^- \quad \forall e \in \mathcal{E}'_h \equiv \text{lati interni} \\ \{\boldsymbol{\tau}\} &= \frac{\boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^-}{2}; & \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket &= \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^- \quad \forall e \in \mathcal{E}'_h \equiv \text{lati interni} \end{aligned}$$

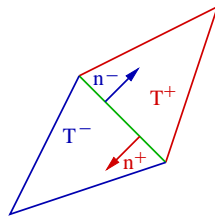


Figura 8

Sui lati di bordo poniamo invece:

$$(11) \quad \llbracket v \rrbracket = v \mathbf{n}; \quad \{\boldsymbol{\tau}\} = \boldsymbol{\tau}.$$

Non avremo bisogno delle medie di scalari o dei salti di vettori sui lati di bordo, che quindi non vengono definiti. È importante notare che, in base alle definizioni (10) e (11), *il salto di uno scalare risulta essere un vettore* (diretto come la normale al lato) mentre *il salto di un vettore risulta essere uno scalare* che inoltre tiene conto solo dei salti della *componente normale* del vettore stesso.

Utilizzando le notazioni appena introdotte, abbiamo quindi la seguente *formula fondamentale*, la cui dimostrazione è banale (si tratta di riorganizzare le somme) ma che risulta estremamente *comoda*. Sia  $q$  uno scalare regolare a tratti, e  $\boldsymbol{\tau}$  un vettore regolare a tratti. Accettiamo ovviamente che abbiano valori diversi sulle due facce dello stesso lato. Allora abbiamo:

$$(12) \quad \sum_T \int_{\partial T} q \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \llbracket q \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} \, ds + \sum_{e' \in \mathcal{E}'_h} \int_{e'} \{q\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \, ds.$$

### 3.4. La formulazione discontinua dei problemi ellittici

Torniamo all'idea di base per un problema ellittico. Riprendiamo la formula (9). Sommando su tutti i triangoli, e applicando la formula fondamentale (12), otteniamo, per ogni  $v$  regolare a tratti

$$\sum_T \int_T \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_e \int_e \{\kappa \nabla u\} \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds - \sum_{e'} \int_{e'} \llbracket \kappa \nabla u \rrbracket \cdot \{v\} \, ds = \int_\Omega f v \, dx$$

dove l'ultimo termine al primo membro si annulla per la continuità di  $\kappa \nabla u$ . Possiamo quindi scrivere

$$(13) \quad \sum_T \int_T \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_e \int_e \{\kappa \nabla u\} \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds = \int_\Omega f v \, dx.$$

A questo punto, dato che i salti di  $u$  sono nulli, possiamo imbellettare la formula precedente aggiungendo un termine che simmetrizza la formula ([34], [58], [35], [1], [2]).

$$\sum_T \int_T \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_e \int_e \{\kappa \nabla u\} \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds - \sum_e \int_e \{\kappa \nabla v\} \cdot \llbracket u \rrbracket \, ds = \int_\Omega f v \, dx,$$

oppure la dissimmetrizza ([12], [13], [49])

$$\sum_T \int_T \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_e \int_e \{\kappa \nabla u\} \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds + \sum_e \int_e \{\kappa \nabla v\} \cdot \llbracket u \rrbracket \, ds = \int_\Omega f v \, dx.$$

### 3.5. Stabilizzazioni

Tutte le scelte precedenti (simmetrizzare, dissimmetrizzare oppure non aggiungere nulla (Dawson-Sun-Wheeler)) danno luogo a metodi *instabili*. Serve allora un altro termine per *stabilizzare*. Ad esempio (13) verrà stabilizzata come

$$\sum_T \int_T \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_e \int_e \{\kappa \nabla u\} \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds + \sum_{e'} \frac{c}{|e'|} \int_{e'} \llbracket u \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

dove  $c$  è un parametro (di stabilizzazione) *abbastanza grosso*. In modo simile si stabilizzano (tipicamente) le altre formulazioni (simmetrizzata e antisimmetrizzata).

### 3.6. Confronto con SUPG

Dovrebbe essere chiaro, da quanto abbiamo detto sui problemi iperbolici e sui problemi ellittici simmetrici, come si possa ottenere, da questi, la formulazione del metodo degli elementi finiti discontinui anche per problemi di diffusione-trasporto. Nella Figura 9 vediamo il metodo discontinuo (nella versione simmetrizzata, e con il trattamento *upwind* del termine convettivo), confrontato con il metodo SUPG. Il problema scelto è quello (più difficile di quanto non sembri) del trasporto passivo di una discontinuità (esattamente come nella Figura 6). Si può notare che lo strato limite interno risulta più ripido, (e contemporaneamente le zone che dovrebbero essere piatte sono rese meglio), per gli elementi discontinui. Inoltre i metodi discontinui (nei casi, come questo, di diffusione veramente piccola) perdono la cognizione delle condizioni ai limiti in *outflow*, e si comportano come se avessero delle condizioni naturali. Questo, *a seconda delle applicazioni*, può essere considerato come un aspetto positivo del metodo, oppure un aspetto negativo.

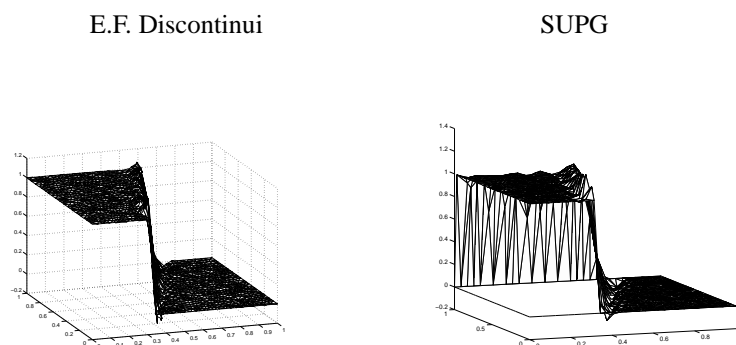


Figura 9

## 4. La nuova impostazione

### 4.1. Il punto di partenza

L'idea di base della nuova impostazione (Brezzi-Cockburn-Marini-Süli) è che una funzione  $u$ , a priori discontinua, risolve

$$\begin{cases} Au \equiv -\operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

se e solo se

$$(14) \quad \begin{cases} \bullet Au = f & \text{in ogni elemento} \\ \bullet \llbracket u \rrbracket = 0 & \text{su ogni lato} \\ \bullet \llbracket \sigma \rrbracket = 0 & \text{su ogni lato interno} \end{cases}$$

con, ovviamente,  $\sigma \equiv \kappa \nabla u$ .

Definiamo  $H^2(\mathcal{T}_h)$  come lo spazio delle funzioni che sono in  $H^2$  di ogni elemento, separatamente. Scegliamo tre operatori  $B_0, B_1, B_2$  da  $H^2(\mathcal{T}_h)$  a  $L^2(\mathcal{T}_h)$ ,  $(L^2(\mathcal{E}_h))^2$  e  $L^2(\mathcal{E}'_h)$ , rispettivamente.

Quindi consideriamo la seguente formulazione *variazionale*: trovare  $u \in H^2(\mathcal{T}_h)$  tale che:

$$(15) \quad (Au - f, B_0(v))_h + \langle \llbracket u \rrbracket, B_1(v) \rangle_h + \langle \llbracket \sigma \rrbracket, B_2(v) \rangle_h^0 = 0$$

per ogni  $v \in H^2(\mathcal{T}_h)$ , dove

$$(u, v)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u v \, dx$$

e

$$\langle u, v \rangle_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e u v \, ds \quad \langle u, v \rangle_h^0 = \sum_{e \in \mathcal{E}'_h} \int_e u v \, ds.$$

### 4.2. Condizioni sugli operatori-peso $B_j$

Non è difficile verificare che (15) ridà le tre condizioni (14) su  $u$  (cioè  $Au = f$ ,  $\llbracket u \rrbracket = 0$  e  $\llbracket \sigma \rrbracket = 0$ ) se valgono le tre proprietà seguenti:

- $\forall T \in \mathcal{T}_h$  e  $\forall \varphi \in C_0^\infty(T)$  esiste  $v \in H^2(\mathcal{T}_h)$  tale che

$$B_0 v = \varphi \text{ in } T, \quad B_0 v = 0 \text{ in } \mathcal{T}_h \setminus T, \quad B_1 v \cdot \mathbf{n} \equiv 0, \quad B_2 v \equiv 0$$

- $\forall e \in \mathcal{E}_h$  e  $\forall \psi \in C_0^\infty(e)$  esiste  $v \in H^2(\mathcal{T}_h)$  tale che

$$B_1 v \cdot \mathbf{n} = \psi \text{ su } e, \quad B_1 v \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ su } \mathcal{E}_h \setminus e, \quad B_2 v \equiv 0$$

- $\forall e \in \mathcal{E}'_h$  e  $\forall \chi \in C_0^\infty(e)$  esiste  $v \in H^2(\mathcal{T}_h)$  tale che

$$B_2 v = \chi \text{ su } e, \quad B_2 v = 0 \text{ su } \mathcal{E}'_h \setminus e.$$

### 4.3. Scelta di $B_0$ e uso della formula fondamentale

Con la “scelta classica”  $B_0 v \equiv v$ , e usando la formula fondamentale (12), abbiamo:

$$\begin{aligned}
(Au, B_0 v)_h &\equiv \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K -\operatorname{div}(\kappa \nabla u) v \, dx \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial K} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_K v \, ds \right\} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla v \, dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \llbracket v \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \, ds - \sum_{e' \in \mathcal{E}'_h} \int_{e'} \{v\} \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \, ds \\
&= (\boldsymbol{\sigma}, \nabla v)_h - \langle \{\boldsymbol{\sigma}\}, \llbracket v \rrbracket \rangle_h - \langle \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket, \{v\} \rangle_h^0.
\end{aligned}$$

Ponendo quindi

$$(16) \quad a_D(u, v) := (\kappa \nabla u, \nabla v)_h - \langle \{\kappa \nabla u\}, \llbracket v \rrbracket \rangle_h$$

si ha allora immediatamente

$$(17) \quad (Au, B_0 v)_h = a_D(u, v) - \langle \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket, \{v\} \rangle_h^0$$

### 4.4. Una scelta per $B_2$

Considerando (15) e (17) (che discende immediatamente dalla scelta *classica* precedente per  $B_0$ ) osserviamo immediatamente che ponendo

$$B_2(v) := \{v\}$$

l'espressione della formulazione di base (15) si semplifica in

$$(18) \quad a_D(u, v) + \langle \llbracket u \rrbracket, B_1(v) \rangle_h = (f, v)_h \quad \forall v.$$

### 4.5. Scelte per $B_1$ : simmetrizzazioni e stabilizzazioni

Nella scelta di  $B_1$ , che dobbiamo ancora operare in (18), bisogna comunque tener conto del fatto che *non possiamo prendere*  $B_1 = 0$ , visto che altrimenti non imporremmo in nessun modo la condizione  $\llbracket u \rrbracket = 0$ . Viene naturale, nella scelta di  $B_1$ , preoccuparsi anche della *stabilità* del metodo risultante. Una scelta possibile consiste nello scegliere un  $c$  opportuno, costante a tratti su  $\mathcal{E}_h$ , e prendere, su ogni lato  $e$ ,

$$(19) \quad B_1(v)|_e := \frac{c_e}{|e|} \llbracket v \rrbracket.$$

Ponendo, per ogni  $e \in \mathcal{E}_h$ ,  $\gamma \equiv \gamma(e) := c_e/|e|$ , la (19) fornisce

$$(20) \quad (\kappa \nabla u, \nabla v)_h - \langle \llbracket v \rrbracket, \{\kappa \nabla u\} \rangle_h + \langle \gamma \llbracket u \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle_h = (f, v)_h \quad \forall v.$$

Stranamente, tale scelta (che con la presente impostazione sembrerebbe abbastanza naturale) è arrivata, storicamente, solo molto di recente ([57], [33]). D'altra parte potremmo invece volere una forma simmetrica, e scegliere

$$(21) \quad B_1(v)|_e := \frac{c}{|e|} \llbracket v \rrbracket - \{\kappa \nabla v\},$$

che fornisce (sempre per ogni  $v$ ),

$$(22) \quad (\kappa \nabla u, \kappa \nabla v)_h - \langle \llbracket v \rrbracket, \{\kappa \nabla u\} \rangle_h - \langle \llbracket u \rrbracket, \{\nabla v\} \rangle_h + \langle \gamma \llbracket u \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle_h = (f, v)_h.$$

Tale scelta, per solito denominata IP (Interior Penalty), risulta invece, storicamente, la prima (si vedano i già citati [34], [58], [35], [1], [2]). Anche se qui non abbiamo il tempo per discutere questo aspetto, il pregio maggiore della scelta (22) consiste nella proprietà cosiddetta di *consistenza aggiunta*. Brevemente, la forma bilineare aggiunta è consistente con il problema aggiunto (v. [4]). Tale proprietà risulta utilissima nella dimostrazione delle stime dell'errore in  $L^2(\Omega)$  (v. sempre [4]).

Potremmo invece voler anti-simmetrizzare prendendo

$$(23) \quad B_1(v)|_e := \frac{c}{|e|} \llbracket v \rrbracket + \{\kappa \nabla v\},$$

che fornirebbe

$$(24) \quad (\kappa \nabla u, \kappa \nabla v)_h - \langle \llbracket v \rrbracket, \{\kappa \nabla u\} \rangle_h + \langle \llbracket u \rrbracket, \{\nabla v\} \rangle_h + \langle \gamma \llbracket u \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle_h = (f, v)_h.$$

Quest'ultima scelta, introdotta abbastanza recentemente da Baumann-Oden, ([12], [13], [49]), e nella sua forma stabilizzata da Rivière-Wheeler-Girault [52], ha il vantaggio di semplificare l'analisi di stabilità, quando si cerca di dimostrare la coercività della forma bilineare prendendo  $v = u$ .

#### 4.6. Altre scelte per $B_2$

D'altra parte, anche per  $B_2$  potremmo fare scelte differenti. Per esempio potremmo prendere

$$B_2 v = \{v\} + \gamma_1 \llbracket \nabla v \rrbracket \quad \text{e} \quad B_1(v) = \gamma \llbracket v \rrbracket - \{\kappa \nabla v\}$$

dove  $\gamma$  è come quella già considerata in precedenza e  $\gamma_1$  è del tipo  $\gamma_1(e) := c_e |e|$ . La forma bilineare finale diverrebbe

$$\begin{aligned} & (\kappa \nabla u, \nabla v)_h - \langle \{\kappa \nabla u\}, \llbracket v \rrbracket \rangle_h - \langle \{\kappa \nabla v\}, \llbracket u \rrbracket \rangle_h \\ & + \langle \gamma \llbracket u \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle_h + \langle \gamma_1 \llbracket \kappa \nabla u \rrbracket, \llbracket \nabla v \rrbracket \rangle_h^0, \end{aligned}$$

dove i primi due termini assicurano la consistenza forte, e gli altri servono per simmetrizzare (se vogliamo) ma soprattutto per stabilizzare. Ma è chiaro che la gamma di scelte possibili è vastissima, e molte di esse sono ancora da esplorare, sia dal punto di vista teorico che da quello della sperimentazione numerica.

#### 4.7. Stime dell'errore

Con le scelte precedenti, se i coefficienti di stabilizzazione sono scelti opportunamente, la forma bilineare (che indichiamo qui con  $a_h(u, v)$ ) dovrebbe soddisfare:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h & 2) \quad & \alpha \|v_h\|^2 \leq a_h(v_h, v_h) \quad \forall v_h \\ 3) \quad & a_h(w_h, v_h) \leq C \|w_h\| \|v_h\| \quad \forall w_h, v_h & 4) \quad & \|u - u_I\| \leq C h \|u\|_2 \end{aligned}$$

e dove

$$\|v_h\|^2 := (\kappa \nabla v_h, \nabla v_h)_h + \frac{1}{h} \langle \llbracket v_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket \rangle_h + h \langle \llbracket \kappa \nabla v_h \rrbracket, \llbracket \nabla v_h \rrbracket \rangle_h^0$$

e  $u_h$  (soluzione discreta),  $v_h$ ,  $w_h$ , e  $u_I$  (interpolante di  $u$ ) sono lineari a tratti e discontinue.

Quindi, come nel caso degli elementi finiti continui,

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - u_I\|^2 &\leq a(u_h - u_I, u_h - u_I) = a(u - u_I, u_h - u_I) \\ &\leq C \|u - u_I\| \|u_h - u_I\| \leq C h \|u_h - u_I\|. \end{aligned}$$

Si veda [4] per maggiori dettagli.

#### 4.8. Problema filosofico

Un problema quasi filosofico, e forse puramente nominalistico, è quello di decidere cosa debba intendersi per *stabilizzazione* di un metodo basato su elementi finiti discontinui.

In un certo senso, per distinguere quando si possa dire che un metodo è stato stabilizzato, bisognerebbe prima chiarire quali siano i metodi *originari*. Nel caso degli elementi finiti tradizionali sembra esserci un consenso abbastanza ampio su questo punto. Ad esempio la formulazione (1) è comunemente accettata come *metodo non stabilizzato*, mentre la formulazione SUPG (6) viene da tutti accettata come una stabilizzazione di (1). Al contrario, anche solo per il problema di Laplace, non è affatto chiaro quale debba essere considerata la versione agli elementi finiti discontinui *non stabilizzata*. È importante notare che, come messo in luce dalla formulazione (15) e dalla successiva trattazione del paragrafo 4.2, *non sembra ragionevole accettare come versione base la (18) con  $B_1 = 0$* . Infatti staremmo discretizzando una formulazione continua che non ha neppure unicità della soluzione. Si potrebbe allora pensare alla (22) (o alla (24)) con  $\gamma = 0$ , ma la scelta appare comunque abbastanza arbitraria.

In effetti, taluni ritengono che *i Metodi Discontinui sono automaticamente stabili, e non necessitano di nessuna stabilizzazione*.

Altri invece ritengono che *i Metodi Discontinui necessitano di essere stabilizzati in modo sistematico*.

Ed è per certi versi sorprendente che, nell'esempio degli operatori iperbolici, taluni ritengono che la *versione base* sia quella in cui come valore di  $u$  alle interfacce si prende il valore *upwind* (quindi la versione base è stabile, e non sono necessarie stabilizzazioni

di sorta) laddove altri ritengono che nella versione base si debba prendere *la media* dei valori di  $u$  sui due triangoli adiacenti, mentre la scelta del valore *upwind*, equivale a una stabilizzazione coi salti. Infatti (v. ad esempio [27], [18])

$$u^{upw} \boldsymbol{\beta} \cdot \llbracket v \rrbracket \equiv \{u\} \boldsymbol{\beta} \cdot \llbracket v \rrbracket + \frac{|\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|}{2} \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket.$$

Come si vede, il rischio di cadere nel nominalismo puro è rilevante. Forse, se la (nuova) formulazione (15) insegna qualcosa, il suo insegnamento sembra essere che *non esiste* una formulazione base, e quindi non ha molto senso cercare di distinguere cosa sia un metodo stabilizzato e cosa invece un metodo non stabilizzato.

#### Riferimenti bibliografici

- [1] ARNOLD D.N., *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*, Ph.D. thesis, University of Chicago, Chicago 1979.
- [2] ARNOLD D.N., *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 742–760.
- [3] ARNOLD D.N., BREZZI F., COCKBURN B. AND MARINI D., *Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, First International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.-W. Shu, eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, **11**, Springer Verlag, 89–101.
- [4] ARNOLD D.N., BREZZI F., COCKBURN B. AND MARINI D., *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., **39** (2002), 1749–1779.
- [5] AUBIN J.P., *Approximation des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs non linéaires*, J. Math. Anal. Appl. **30** (1970), 510–521.
- [6] BABUŠKA I., *The finite element method with penalty*, Math. Comp. **27** (1973), 221–228.
- [7] BABUŠKA I. AND ZLÁMAL M., *Nonconforming elements in the finite element method with penalty*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 863–875.
- [8] BAKER G.A., *Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements*, Math. Comp. **31** (1977), 45–59.
- [9] BAKER G.A., JUREIDINI W.N. AND KARAKASHIAN O.A., *Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), 1466–1485.
- [10] BASSI F. AND REBAY S., *A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. **131** (1997), 267–279.
- [11] BASSI F., REBAY S., MARIOTTI G. AND SAVINI M., *A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows*, 2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics (Antwerpen, Belgium) (R. Decuyper and G. Dibelius, eds.), Technologisch Instituut 1997, 99–108.
- [12] BASSI F., REBAY S., MARIOTTI G. AND SAVINI M., *A discontinuous hp finite element method for the Navier-Stokes equations*, 10th. International Conference on Finite Element in Fluids 1998.
- [13] BAUMANN C.E. AND ODEN J.T., *A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **175** (1999), 311–341.
- [14] BECKER R. AND HANSBO P., *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids*, Tech. Report 3613, INRIA, 1999.
- [15] BREZZI F., COCKBURN B., MARINI L.D. AND SÜLI E., *Stabilization mechanisms in Discontinuous Galerkin finite element methods* submitted to Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg..
- [16] BREZZI F. AND FORTIN M., *Mixed and hybrid Finite element methods*, Springer Verlag 1991.

- [17] BREZZI F., HUGHES T.J.R., MARINI L.D. AND MASUD A., *Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow*, to appear in J. Sci. Comput..
- [18] BREZZI F., MARINI L.D. AND SÜLI E., *Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** 12 (2004).
- [19] BREZZI F., MANZINI G., MARINI D., PIETRA P. AND RUSSO A., *Discontinuous finite elements for diffusion problems*, Atti Convegno in onore di F. Brioschi, Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere 1999, 197–217.
- [20] BREZZI F., MANZINI G., MARINI D., PIETRA P. AND RUSSO A., *Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems*, Numerical Methods for Partial Differential Equations **16** (2000), 365–378.
- [21] BROOKS A.N. AND HUGHES T.J.R., *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **32** (1982), 199–259.
- [22] BURMAN E. AND HANSBO P., *Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems*, to appear in Comput. Methods Appl. Mech. Engrg..
- [23] CASTILLO P., *An optimal error estimate for the local discontinuous Galerkin method*, First International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods (Cockburn B., Karniadakis G.E. and Shu C.-W. eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering **11**, Springer Verlag 2000, 285–290.
- [24] CASTILLO P., COCKBURN B., PERUGIA I. AND SCHÖTZAU D., *An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., to appear.
- [25] CIARLET P., *The finite element method for elliptic problems*, North Holland 1978.
- [26] COCKBURN B., *Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems*, High-Order Methods for Computational Physics (T. Barth and H. Deconink eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering **9**, Springer Verlag 1999, 69–224.
- [27] B. COCKBURN, *Discontinuous Galerkin Methods*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., **83** (2003), 731–754.
- [28] B. COCKBURN AND DAWSON C., *Some extensions of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion equations in multidimensions*, Proceedings of the Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications: MAFELAP X (J.R. Whiteman ed.), Elsevier 2000, 225–238.
- [29] COCKBURN B., KANSCHAT G., PERUGIA I. AND SCHÖTZAU D., *Superconvergence of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems on Cartesian grids*, SIAM J. Numer. Anal., to appear.
- [30] COCKBURN B., KARNIADAKIS G.E. AND SHU C.-W., *The development of discontinuous Galerkin methods*, First International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods (Cockburn B., Karniadakis G.E. and Shu C.-W. eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering **11**, Springer Verlag 2000, 3–50.
- [31] COCKBURN B. AND SHU C.-W., *The Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: Multidimensional systems*, J. Comput. Phys. **141** (1998), 199–224.
- [32] COCKBURN B. AND SHU C.-W., *The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems*, SIAM J. Numer. Anal., **35** (1998), 2440–2463.
- [33] DAWSON C.N., SUN S. AND WHEELER M.F., *Compatible algorithms for coupled flow and transport*, to appear in Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg..
- [34] DOUGLAS J. JR. AND DUPONT T., *Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods*, Lecture Notes in Physics, **58**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [35] DOUGLAS J. JR., DARLOW B.L., KENDALL R.P. AND WHEELER M.F., *Self-adaptive Galerkin methods for one-dimensional, two-phase immiscible flow*, AIME Fifth Symposium on Reservoir Simulation (Denver, Colorado), Society of Petroleum Engineers 1979, 65–72.
- [36] DUBINER M., *Spectral methods on triangles and other domains*, J. Sci. Comp. **6** (1991), 345–390.

- [37] DUTRA DO CARMO E.G. AND DUARTE A.V.C., *A discontinuous finite element based domain decomposition method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., to appear.
- [38] FRANCA L.P., FREY S.L. AND HUGHES T.J.R., *Stabilized Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Diffusive Model*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **95** (1992), 253–276.
- [39] HOUSTON P., JENSEN M. AND SÜLI E., *Hp-discontinuous Galerkin finite element methods with least-squares stabilization*, Journal of Scientific Computing **17** (2002), 1–26.
- [40] HOUSTON P., SCHWAB C. AND SÜLI E., *Stabilized hp-finite element methods for first-order hyperbolic problems*, SIAM J. Numer. Anal., **37** (2000), 1618–1643.
- [41] HOUSTON P., SCHWAB CH. AND SÜLI E., *Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems*, SIAM J. of Numer. Anal. **39** (2002), 2133–2163.
- [42] HUGHES T.J.R. AND FRANCA L.P., *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **65** (1987), 85–96.
- [43] JOHNSON C. AND PITKÄRANTA J., *An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic conservation law*, Math. Comp. **46** (1986), 1–23.
- [44] LESAINT P. AND RAVIART P.-A., *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, in: ‘Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations’, (deBoor C.A. ed.), Academic Press, New York 1974, 89–123.
- [45] LIONS J.L., *Problèmes aux limites non homogènes à données irrégulières: Une méthode d’approximation*, Numerical Analysis of Partial Differential Equations (C.I.M.E., Ispra, 1967) Edizioni Cremonese, Roma, 283–292.
- [46] LOMTEV I. AND KARNIADAKIS G.E., *A discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **29** (1999), 587–603.
- [47] MASUD A. AND HUGHES T.J.R., *A stabilized mixed finite element method for Darcy flow*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **191** (2002), 4341–4370.
- [48] NITSCHKE J.A., *Über ein Variationsprinzip zur Lösung Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **36** (1971), 9–15.
- [49] ODEN J.T., BABUŠKA I. AND BAUMANN C.E., *A discontinuous hp finite element method for diffusion problems*, J. Comput. Phys. **146** (1998), 491–519.
- [50] REED W.H. AND HILL T.R., *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory 1973.
- [51] RIVIÈRE B. AND WHEELER M.F., *A discontinuous Galerkin method applied to nonlinear parabolic equations*, First International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods (Cockburn B., Karniadakis G.E. and C.-W. Shu eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering **11**, Springer Verlag 2000, 231–244.
- [52] RIVIÈRE B., WHEELER M.F. AND GIRAULT V., *Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. Part I*, Tech. Report 99-09, TICAM, 1999.
- [53] RUSTEN T., VASSILEVSKI P.S. AND WINTNER R., *Interior penalty preconditioners for mixed finite element approximations of elliptic problems*, Math. Comp. **65** (1996), 447–466.
- [54] SHU C.-W., *Different formulations of the discontinuous Galerkin method for the viscous terms*, Conference in Honor of Professor H.-C. Huang on the occasion of his retirement (Xue W.M., Shi Z.C., Mu M. and Zou J. eds.), Science Press 2000, 14–45.
- [55] SÜLI E., HOUSTON P. AND SCHWAB CH., *hp-finite element methods for hyperbolic problems*, Proceedings of the Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications: MAFELAP X (Whiteman J.R. ed.), Elsevier 2000, 143–162.
- [56] SÜLI E., SCHWAB CH. AND HOUSTON P., *hp-DGFEM for partial differential equations with non-negative characteristic form*, First International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods (Cockburn B., Karniadakis G.E. and Shu C.-W. eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering **11**, Springer Verlag 2000, 221–230.

- [57] SUN S., *Discontinuous Galerkin methods for reactive transport in porous media*, Ph.D. thesis, The University of Texas, Austin 2003.
- [58] WHEELER M.F., *An elliptic collocation-finite element method with interior penalties*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), 152–161.

**AMS Subject Classification: 65N30.**

F. BREZZI, Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, ITALIA  
IMATI del CNR, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, ITALIA e-mail: [brezzi@imati.cnr.it](mailto:brezzi@imati.cnr.it)

