

M.A. Bahayou

SUR LE PROBLÈME DE HELMHOLTZ

Résumé. L'objet de cet article est de traiter un problème aux limites elliptique, dit de Helmholtz, qui intervient lors de la résolution dans le domaine spectral, du problème de diffraction d'ondes par un obstacle. Le but est de montrer, grâce à la méthode des équations intégrales et en s'appuyant sur les résultats d'opérateurs pseudo-différentiels et d'opérateurs de Fredholm, que le problème extérieur est bien posé au sens de Hadamard, i.e. l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Le plan sera le suivant : on commencera par une petite introduction de l'origine physique du problème de Helmholtz, puis à l'aide d'un théorème de représentation intégrale on examinera la question d'unicité ; ensuite, pour aboutir à l'existence, on passera en revue quelques résultats d'analyse microlocale, on introduira la méthode des équations intégrales et on conclura l'existence à l'aide de la théorie de Fredholm.

Nous ne prétendons nullement que ce travail est nouveau, du point de vue de l'analyse mathématique, voir notre bibliographie où des résultats plus généraux existent. Nous avons plutôt essayé, de point de vue de l'analyse mathématique, d'attirer l'attention sur certaines techniques avancées, tels que les opérateurs pseudo-différentiels et les projecteurs de Calderón qui nous ont permis de mieux formuler mathématiquement le problème de Helmholtz.

1. Introduction

Dans la théorie linéaire des ondes, on peut distinguer deux classes : d'une part les ondes mécaniques, qui nécessitent un milieu matériel pour se propager, un fluide pour les ondes acoustiques et un solide pour les ondes élastiques (ondes sismiques), et d'autre part, les ondes électromagnétiques qui peuvent se propager dans le vide. On s'est intéressé à la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle régulier de \mathbf{R}^3 . Le choix est dans un souci de clarté, quant à la méthode, elle est générale et s'applique parfaitement aux autres cas, voir D. Colton, R. Kress [6].

Considérons la propagation d'une onde acoustique, de petite amplitude, produite par une petite perturbation dans un fluide homogène et isotrope de \mathbf{R}^3 . L'équation des ondes : $\partial_{tt}P - c^2\Delta P = 0$ où c est la vitesse du son dans le milieu et P représente le champ pression ou le potentiel de vitesse (selon le modèle étudié) est déduite par linéarisation des équations du mouvement des fluides (équation d'Euler, équation de continuité et l'hypothèse adiabatique), voir D. Colton, R. Kress [6]. Lorsqu'on cherche à résoudre cette équation dans le domaine spectral, en considérant les ondes harmoniques : $P(t, x) = \text{Re}(e^{-i\omega t}u(x))$ avec fréquence $\omega > 0$, on s'aperçoit que u , qui est à valeur complexe, vérifie l'équation dite de Helmholtz :

$$(1) \quad (\Delta + k^2)u = 0$$

où $k = \frac{\omega}{c} > 0$ est le nombre d'onde. L'onde continue sa propagation jusqu'à ce qu'elle rencontre un obstacle, i.e. un milieu non-homogène délimité par une surface régulière, et le phénomène de diffraction de l'onde par cet obstacle se produit.

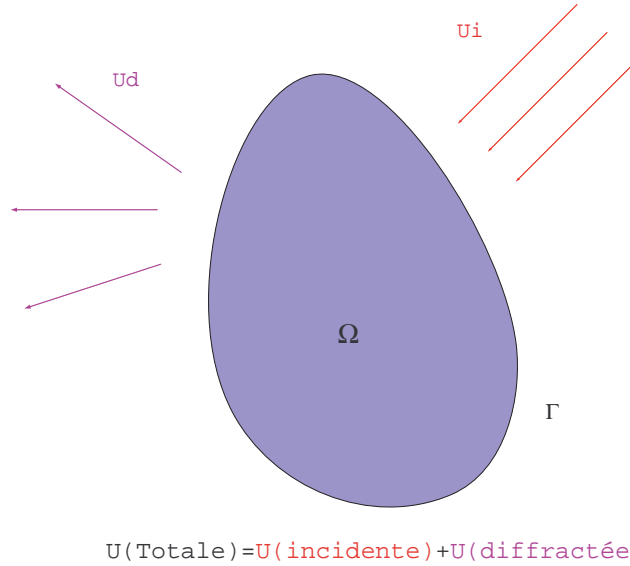


FIG. 1 – diffraction d’ondes.

2. Position du problème

Le problème sera de déterminer l’onde diffractée u_d connaissant l’onde incidente u_i , qui est mesurée sur la surface, et sachant que l’onde totale $u_T = u_i + u_d$, u_i et u_d vérifient l’équation de Helmholtz (1). On a essentiellement les conditions aux bords suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} (\Delta + k^2) u_T = 0 \text{ dans } \Omega^c \\ u_T = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{sound-soft surface}} \begin{cases} (\Delta + k^2) u_d = 0 \text{ dans } \Omega^c \\ u_d = -u_i \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} (\Delta + k^2) u_T = 0 \text{ dans } \Omega^c \\ \frac{\partial u_T}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{sound-hard surface}} \begin{cases} (\Delta + k^2) u_d = 0 \text{ dans } \Omega^c \\ \frac{\partial u_d}{\partial \eta} = -\frac{\partial u_i}{\partial \eta} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) u_T = 0 \text{ dans } \Omega^c \\ \frac{\partial u_T}{\partial \eta} + i\lambda u_T = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \xrightarrow[\lambda > 0]{\text{impédance}} \begin{cases} (\Delta + k^2) u_d = 0 \text{ dans } \Omega^c \\ \frac{\partial u_d}{\partial \eta} + i\lambda u_d = -\left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + i\lambda u_i\right) \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Le travail qui va suivre sera focalisé sur le problème de Helmholtz extérieur de type Dirichlet (2) et de type Neumann (3).

Deux familles importantes de solutions, au problème de Helmholtz, sont donnés :

- 1) Ondes sphériques : $u(x) = \frac{\sin k|x|}{|x|}$ est une solution radiale du problème (1).
- 2) Ondes planes : $u(x) = e^{ik\langle x, d \rangle}$, où $d \in S^2$ (sphère unité de \mathbf{R}^3), est une solution du problème (1), dite onde plane car $e^{i(k\langle x, d \rangle - \omega t)}$ est constante sur les

plans $\{k\langle x, d \rangle - \omega t = c^{te}\}$. Elles se propagent avec la vitesse c dans la direction d .

Le problème de Helmholtz sur tout l'espace \mathbf{R}^3 admet donc une infinité de solution, pour récupérer l'unicité dans ce passage au domaine spectral il faut imposer des conditions de comportements à l'infini dites *conditions de radiation de Sommerfeld*. On dit que u est *radiante* ou vérifie la condition de l'onde sortante, si

$$(4) \quad (\partial_r - ik)u = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

lorsque $r = |x| \rightarrow +\infty$ uniformément dans toutes les directions. Ceci est conforme avec le modèle physique considéré, en effet si $J_r = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \int_{S(0,r)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds$ définit le flux d'énergie à travers la sphère $S(0, r)$ alors la condition de radiation (4) implique

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{S(0,r)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2k \text{Im} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \right) ds = 0$$

ce qui donne $\lim_{r \rightarrow +\infty} J_r \geq 0$. Le flux d'énergie est donc sortant et l'onde diffractée se propage vers l'infini sans en revenir.

On verra, plus loin, que les conditions de radiation de Sommerfeld garantissent l'unicité du problème extérieur de Dirichlet et de Neumann.

3. Unicité du problème extérieur

3.1. Théorème de représentation

Le résultat de départ est basé sur les formules de Green et constitue une étape importante dans la recherche d'une solution au problème de Helmholtz, il est donné par le théorème de représentation suivant :

THÉORÈME 1. Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^3 , borné et de classe C^2 et soient :

$$N^- = \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \frac{\partial u^-}{\partial \eta(x)} \text{ existe uniformément, } \forall x \in \Gamma \right\}$$

$$N^+ = \left\{ u \in C^2(\Omega^c) \cap C(\bar{\Omega}^c), \frac{\partial u^+}{\partial \eta(x)} \text{ existe uniformément, } \forall x \in \Gamma \right\}$$

où

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \eta(x)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \nabla u(x \pm h\eta(x)), \eta(x) \rangle$$

et $\Omega^c = \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

(i) Pour tout $u \in N^-$, solution du problème de Helmholtz intérieur, on a

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) E_k(x, y) - u(y) \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x, y) \right) d\mu(y) \quad \forall x \in \Omega$$

(ii) Pour tout $u \in N^+$, solution radiante du problème de Helmholtz extérieur,

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) E_k(x, y) \right) d\mu(y) \quad \forall x \in \Omega^c$$

où $E_k = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ est une solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz $\Delta + k^2$. De plus, le résultat subsiste encore pour tout autre solution fondamentale.

Démonstration. Voir D. Colton, R. Kress [6]. □

Conséquences

- Toute solution du problème de Helmholtz est analytique. Pour le vérifier il suffit de faire la représentation intégrale de la solution, sur une boule $B(x, r)$ entièrement incluse dans le domaine, et utiliser le fait que $E_k(x, y)$ est analytique pour $x \neq y$.
- Toute solution du problème de Helmholtz admet une représentation intégrale en fonction de ses données de Dirichlet et de Neumann. Sachant que seulement une des deux conditions est donnée, alors l'alternative suivante s'impose :
 1. Éliminer la donnée inconnue en choisissant une solution fondamentale particulière dite fonction de Green qui résout le problème homogène. Cette méthode n'est simple que pour des domaines présentant des symétries et ceci par le principe de réflexion de Schwarz, voir G. Chen, J. Zhou [5]. Notons que la recherche d'une fonction de Green est souvent aussi difficile que le problème initial et elle n'existe même pas, pour certains situations, d'où les limites de cette méthode.
 2. Établir une relation entre les données de Cauchy, c'est la méthode des équations intégrales. On est tenté de déterminer les traces de u directement sur sa représentation intégrale, pour cela on a besoin d'étudier de près les *potentiels de simple et de double couche* :

$$\begin{aligned} \phi &\longmapsto S\phi(x) = \int_{\Gamma} E_k(x, y)\phi(y) d\mu(y) \\ \phi &\longmapsto D\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x, y)\phi(y) d\mu(y) \end{aligned}$$

Le problème de Helmholtz intérieur n'est pas uniquement résoluble pour tout nombre d'onde k , car le Laplacien possède des valeurs propres négatives dites valeurs de *résonance* ; on a unicité seulement en dehors de ces valeurs.

On va montrer l'unicité du problème extérieur en utilisant un certain nombre de résultats s'appuyant essentiellement sur l'analyticité de la solution.

THÉORÈME 2 (Champ acoustique lointain). *Toute solution radiante de l'équa-*

tion de Helmholtz extérieur a le comportement asymptotique

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right)$$

lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ uniformément dans toute les directions $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$.

u_∞ , dit champ acoustique lointain de u , est analytique et définie de façon unique sur la sphère unité S^2 et admet la représentation

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \right) d\mu(y) \quad \forall \hat{x} \in S^2$$

Démonstration. $|x - y| = \sqrt{|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2} = |x| - \langle \hat{x}, y \rangle + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(\frac{1}{4\pi} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \text{ et} \\ \frac{\partial}{\partial \eta(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \eta(y)} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \end{aligned}$$

en injectant ces deux égalités dans la représentation intégrale de u , on obtient lorsque $|x| \rightarrow +\infty$

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \eta(y)} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \right) d\mu(y) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right)$$

L'unicité de u_∞ et son analyticité sur S^2 s'en déduisent directement de sa représentation intégrale. \square

THÉORÈME 3. Soit u une solution radiante de l'équation de Helmholtz, alors pour le flux d'énergie à travers toute sphère $S(0, r)$, on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} J_r = \frac{\omega k}{2} \int_{S(0,r)} |u_\infty|^2 ds$$

Démonstration. $\nabla u(x) = ik \frac{x}{|x|} \times \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right)$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ par suite

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} J_r = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{-\omega}{2} \int_{S(0,r)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds = \frac{\omega k}{2} \int_{S(0,r)} |u_\infty|^2 ds$$

\square

Le théorème suivant est dû à Wilcox et représente, avec le lemme de Rellich, la base de tous les résultats d'unicité pour le problème de Helmholtz extérieur.

THÉORÈME 4 (Développement de Wilcox). Soit $u \in C^2(\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ une solution radiante du problème de Helmholtz et soit R_0 grand, de sorte que $S(0, R_0) \subset \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Si r, θ et φ dénotent les coordonnées sphériques de x , alors

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{r^n}$$

et cette série converge absolument et uniformément, ainsi que toutes ses dérivées partielles, pour tout $r \geq R_0$. Les coefficients F_n sont liés par :

$$F_n = \frac{1}{2ikn} (\Delta_0 + n(n-1)\text{id}) F_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

où $\Delta_0 = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité S^2 .

Démonstration. Voir D. Colton, R. Kress [7] □

LEMME 1 (Lemme de Rellich). Soit u une solution radiante du problème de Helmholtz, si $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 d\mu(x) = 0$. Alors, $u \equiv 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

Démonstration. $\int_{|x|=r} |u(x)|^2 d\mu(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |F_0(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi + O\left(\frac{1}{r}\right)$, donc $F_0 \equiv 0$ et $u \equiv 0$ pour $|x| \geq R_0$. Par analyticité, $u \equiv 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ □

LEMME 2. Soit $u \in N^+$ une solution radiante du problème de Helmholtz. Si $\text{Im} \left(\int_\Gamma u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} d\sigma \right) \geq 0$, alors $u \equiv 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

On a le théorème d'unicité suivant

THÉORÈME 5. 1. Le problème de Dirichlet extérieur admet au plus une solution.

2. Le problème de Neumann extérieur admet au plus une solution.

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme ci-dessus, pour le problème de Neumann. Pour le problème de Dirichlet, à qui on ne peut pas appliquer directement le lemme ci-dessus puisque $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ n'existe pas a priori, on se reportera à D. Colton, R. Kress [6], (page 46-47), pour une démonstration élégante basée sur la formule de Green. □

4. Existence de solutions

4.1. Approche microlocale

La théorie des opérateurs pseudo-différentiels a vu le jour suite aux articles originaux de Hormander et de Kohn et Nirenberg. Elle a unifié dans un cadre général

et élégant, les théories déjà existantes des opérateurs intégraux singuliers, initiées par Girould, Mikhlín, Calderón et Zygmund. Par la suite, beaucoup de mathématiciens ont contribué à cette théorie qui est devenue maintenant un outil indispensable dans la théorie moderne des équations aux dérivées partielles.

Tout opérateur de la forme :

$$(5) \quad Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$

est appelé opérateur *pseudo-différentiel*. La fonction a , dite *symbole* (ou *amplitude*) de A , est régulière et asymptotiquement homogène dans le sens $a \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbf{R}^n)$ tel que pour $0 \leq \rho, \delta \leq 1$:

$$\forall K \in \Omega \times \Omega, \forall \alpha \in \mathbf{N}^{2n}, \forall \beta \in \mathbf{N}^n, \exists c > 0, \\ \forall (x, y, \xi) \in K \times \mathbf{R}^n, \quad |D_{(x,y)}^\alpha D_\xi^\beta a(x, y, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

$L_{\rho,\delta}^m$ désigne l'espace de ces opérateurs et $S_{\rho,\delta}^m$ désigne l'espace des symboles. La classe $L_{\rho,\delta}^m$ contient les opérateurs différentiels à coefficients C^∞ et une large classe d'opérateurs intégraux, notamment les "paramétrixes" d'opérateurs elliptiques. Pour donner un sens à l'intégrale oscillante (5) on doit passer par la topologie des symboles et l'intégrale sera définie par densité. Il y a deux approches pour construire une algèbre d'opérateurs sur les variétés, suffisamment large en vu des applications sur les problèmes aux limites elliptiques, à savoir l'approche "noyau" et l'approche "symbole". La première est basée sur le théorème des noyaux de Schwartz

THÉORÈME 6. *Soient X, Y deux ouverts de \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^p respectivement. Il y'a une bijection entre, d'une part les distributions $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ et d'autre part les opérateurs linéaires continus $A : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$. Si $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ on lui associe un opérateur A linéaire continu en posant, pour tout $u \in \mathcal{D}(Y)$, et tout $v \in \mathcal{D}(X)$*

$$(6) \quad \langle Au, v \rangle_{\mathcal{D}'(X) \times \mathcal{D}(X)} = \langle K, v \otimes u \rangle_{\mathcal{D}'(X \times Y) \times \mathcal{D}(X \times Y)}$$

où $v \otimes u(x, y) = v(x)u(y)$. Réciproquement, étant donné un opérateur linéaire continu $A : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$, il existe une et une seule distribution $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ vérifiant (6), K est appelé noyau distribution de l'opérateur A et est encore noté K_A ou $K(x, y)$.

Démonstration. voir J. Chazarain, A. Piriou[4] □

Le noyau distribution d'un opérateur $A \in L_{\rho,\delta}^m$ est C^∞ en dehors de la diagonale de $\Omega \times \Omega$, il en résulte pour A la propriété pseudo-locale :

$$\text{supp sing} Au \subset \text{supp sing} u.$$

Lorsque le noyau $K_A \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, l'opérateur A est dit *régularisant* et ceci équivaut à $A : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ continu et à $A \in L_{\rho,\delta}^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbf{R}} L_{\rho,\delta}^m$. L'approche "noyau" permet aussi de définir les opérateurs propres, notion de nature topologique nécessaire pour

pouvoir composer les opérateurs sans les contraintes des supports. On peut nous restreindre à ce type d'opérateurs, vu que tout opérateur pseudo-différentiel est équivalent à un opérateur propre.

L'approche "symbole" est basée essentiellement sur la *méthode de la phase stationnaire* qui permet d'étudier le comportement asymptotique des intégrales dépendant d'un paramètre du type $I(\lambda) = \int_{\Omega} e^{i\lambda\phi(x)} u(x) dx$, on a le résultat suivant

THÉORÈME 7. *Si Q est une matrice symétrique non dégénérée, alors $\forall u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\forall N \geq 1$*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\frac{\lambda}{2}\langle x, Qx \rangle} u(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sign}Q}}{k! |\det Q|^{\frac{1}{2}} \lambda^{k+\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{2i} \langle D_x, Q^{-1} D_x \rangle \right)^k u(0) + S_N(u, \lambda)$$

où $\text{sign}Q = \#\{\text{valeurs propres} > 0\} - \#\{\text{valeurs propres} < 0\}$, et

$$|S_N(u, \lambda)| \leq \frac{c}{N! \lambda^{\frac{n}{2}+N}} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \left\| D^\alpha \left(\frac{1}{2} \langle D, Q^{-1} D \rangle \right)^N u \right\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}.$$

Ce résultat permet de faire de la **quantification**, i.e. établir une bijection, modulo les régularisants, entre les opérateurs pseudo-différentiels et les symboles

THÉORÈME 8. *Soit $A \in L_{\rho, \delta}^m$ propre, donné par un symbole $a \in S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \Omega, \mathbf{R}^n)$ tel que $\rho > \delta$. Alors $b(x, \xi) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} A(e^{i\langle \cdot, \xi \rangle}) \in S_{\rho, \delta}^m(\Omega, \mathbf{R}^n)$, dit quantifié à gauche, admet le développement asymptotique*

$$b(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x, y, \xi) \right) \Big|_{y=x}$$

de plus $Au(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} e^{i\langle x, \xi \rangle} b(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. On appelle b le symbole complet de A et on le note par σ_A .

Les propriétés algébriques de passage à l'adjoint et la composition des opérateurs se traduisent par des propriétés simples algébrico-différentielles sur leurs symboles. Le calcul pseudo-différentiel est essentiellement :

1. *Approché*, dans le sens où les calculs ne sont pas exactes, mais seulement modulo les régularisants.
2. *Asymptotique*. Exploitant le premier point, on accède aux parties homogènes dans le développement asymptotique du symbole, d'où l'importance des symboles classiques qui sont d'usage constant.

La transformée de Fourier joue un rôle important dans l'étude des opérateurs différentiels à coefficients constants et on veut étendre son rôle pour étudier les opérateurs à coefficients variables. Là les opérateurs pseudo-différentiels, par leur invariance par difféomorphisme, permettent d'étendre les propriétés de la transformée

de Fourier, qui sont liées initialement à la structure de groupe de \mathbf{R}^n , aux variétés différentielles. On résume les deux approches en deux théorèmes :

THÉORÈME 9 (opérateurs $\xrightarrow{\text{quantification}}$ symboles).

1. Si $a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}$ $m_j \downarrow -\infty$ alors, il existe $a \in S_{\rho,\delta}^{m_0}$ tel que $a \sim \sum_{j \geq 0} a_j$.
2. $A \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ propre \Leftrightarrow
 $e^{-i\langle x,\xi \rangle} A(e^{i\langle \cdot,\xi \rangle}) \sim \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_y^{\alpha} a(x,y,\xi) |_{y=x}$.
3. $A \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega) \Leftrightarrow e^{-i\langle x,\xi \rangle} A(\chi e^{i\langle \cdot,\xi \rangle}) \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ pour tout $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
4. Tout opérateur elliptique admet un inverse (une paramétrix).
5. Si $A \in L_{\rho,\delta}^m$ alors $A : H_{comp}^s(\Omega) \rightarrow H_{loc}^{s-m}(\Omega)$ est continu.

THÉORÈME 10 (opérateurs $\xrightarrow{\text{théorème des noyaux de Schwartz}}$ distributions).

1. K_A est C^∞ en dehors de la diagonale, et $K_A \in C^k(\Omega \times \Omega)$ si $k < -(m+n)$.
2. $K_A \in C^\infty(\Omega \times \Omega) \Leftrightarrow A \in \bigcap_{m \in \mathbf{R}} L_{\rho,\delta}^m$ et $A : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ est continu.
3. Les deux projections $\pi_1|_{\text{supp}K_A}$ et $\pi_2|_{\text{supp}K_A}$ sont propres si et seulement si $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ sont continus.
4. Pour tout $A \in L_{\rho,\delta}^m$ il existe $P \in L_{\rho,\delta}^m$ propre tel que $A \sim P$
5. $\text{suppsing}Au \subset \text{suppsingu}, \forall u \in \mathcal{E}'(\Omega)$

Démonstration. Voir A. Grigis, J. Sjostrand [10] □

Trace sectionnelle d’une distribution sur une hypersurface Soit Ω un ouvert à bord Γ , C^∞ et η un champ normal extérieur à Ω ; en vu d’étudier les différentes traces “sectionnelles” des distributions définies sur Ω ou Ω^c et pour donner un sens à leur prolongement, on a besoin de la notion de voisinage tubulaire. On va étudier le “comportement” de certains distributions au voisinage de Γ et ceci dans un système de coordonnées cylindriques qui permettent une séparation de variables. Le point de départ est donné par cette définition

DÉFINITION 1. Soit $U \in C^k(I, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n-1}))$ une famille de distributions sur \mathbf{R}^{n-1} , de classe C^k par rapport à un paramètre $t \in I =]-\alpha, \alpha[$ on peut lui associer injectivement une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ en posant

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_I \langle U(x_n), \varphi(\cdot, x_n) \rangle dx_n \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$$

u est dite de classe C^k en x_n à valeur distribution en x' . Les traces sectionnelles de u sur $\{x_n = 0\}$ sont des distributions $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n-1})$, $0 \leq j \leq k$ définies par

$$\gamma_j u = \gamma_0 (D_n^j u) = U^{(j)}(0)$$

Voisinages tubulaires et surfaces parallèles Soit Ω un ouvert à bord Γ compact et de classe C^k , ($k \geq 1$) et soit η un champ normal extérieur à Ω . Pour $\delta > 0$, on définit un voisinage tubulaire de la surface Γ par $U_\delta = \{z \in \mathbf{R}^n; d(z, \Gamma) < \delta\}$. Comme Γ est compact et $z \mapsto d(z, \Gamma)$ est continue, alors pour tout $z \in \mathbf{R}^n$ il existe un point $p(z) \in \Gamma$, pas nécessairement unique, qui minimise la distance de z à Γ , i.e. tel que $d(z, \Gamma) = \|z - p(z)\|$. Pour δ "suffisamment petit", le point $p(z)$ est unique et

$$U_\delta = \{z \in \mathbf{R}^n / \exists t \in]-\delta, \delta[; z = p(z) + t\eta(p(z))\}$$

Plus précisément, on a le théorème suivant

THÉORÈME 11. *Il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \Phi: \Gamma \times]-\delta, \delta[&\longrightarrow U_\delta \\ (x, t) &\longmapsto \Phi(x, t) = x + t\eta(x) \end{aligned}$$

est un C^{k-1} -difféomorphisme, et la distance de $\Phi(x, t)$ à Γ est $d(\Phi(x, t), \Gamma) = |t|$.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow U \cap \Gamma \\ s = (s_1, \dots, s_{n-1}) &\longmapsto \phi(s) = (\phi_1(s), \dots, \phi_n(s)) \end{aligned}$$

une carte de Γ et soit

$$\begin{aligned} F: V \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (s, t) &\longmapsto \phi(s) + t\eta(\phi(s)) \end{aligned}$$

F est un difféomorphisme local car

$$\det \left(\frac{DF}{D(s, t)} \right)_{t=0} = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \phi}{\partial s_{n-1}} \right\| \neq 0$$

donc pour tout $x \in U \cap \Gamma$, il existe $\varepsilon(x) > 0$, pour lequel F est un difféomorphisme de $\{(s, t) \in V \times \mathbf{R}, |s - \phi^{-1}(x)| < \varepsilon, |t| < \varepsilon\}$ sur son image. Autrement dit, pour tout $x \in \Gamma$, il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que si $x_1 \neq x_2$ dans $B(x, \varepsilon) \cap \Gamma$ et si $|t| < \varepsilon$ alors $\{x_1 + t\eta(x_1)\} \cap \{x_2 + t\eta(x_2)\} = \emptyset$.

Par compacité de Γ , on peut trouver un ε "uniforme" pour tous les points de Γ telle que, si z est de la forme $x + t\eta(x)$ avec $(x, t) \in \Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, qui vérifie $z = p + t\eta(p)$ et $d(z, p(z)) = |t|$. \square

Baucoup de travaux récents sont fondés sur l'étude de l'opérateur *Dirichlet-to-Neumann* DtN, appelé aussi opérateur de *Steklov-Poincaré*, notamment la méthode de décomposition du domaine, où on approxime cet opérateur, sur un bord fictif, par un opérateur différentiel que l'on cherche à inverser. Du point de vue numérique, c'est plus simple d'inverser un opérateur local et ça devient intéressant lorsque on a un control sur cette approximation, i.e. avoir de bonnes estimations a priori.

Opérateur Dirichlet-to-Neumann DtN

Dans le cas d'un demi-espace, $\Omega = \mathbf{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n, x_n > 0\}$, on considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) u = 0, & \text{sur } \Omega \\ u = e^{i\langle \cdot, \xi' \rangle}, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

si l'on cherche u sous la forme $u(x', x_n) = e^{i\langle x', \xi' \rangle} e^{ax_n}$, alors $(\Delta + k^2) u = 0$ si et seulement si $a^2 - |\xi'|^2 + k^2 = 0$. Pour une solution radiante sur Ω , on a $a = -\sqrt{|\xi'|^2 - k^2}$ pour $|\xi'|$ grand. Comme la donnée de Neumann est $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0) = ae^{i\langle x', \xi' \rangle}$, l'opérateur Dirichlet-to-Neumann $\text{DtN} : u|_\Gamma \mapsto \frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma$ est tel que

$$e^{-i\langle x', \xi' \rangle} \text{DtN} \left(e^{i\langle \cdot, \xi' \rangle} \right) = \sqrt{|\xi'|^2 - k^2} \text{ pour } |\xi'| \text{ grand.}$$

et on déduit que $\text{DtN} \in L^1_{1,0}(\Gamma)$, de symbole $a(\xi') = |\xi'|$, pour $|\xi'|$ grand. Notons que cet opérateur n'est pas local, en effet si $u(x) = \sin k|x|/|x|$ est une onde sphérique alors sur toute sphère $S(0, n\pi)$, u est nulle et $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{(-1)^n k}{n\pi}$. Pour un ouvert à bord Ω , on écrit le problème dans un voisinage tubulaire du bord Γ sur lequel existe des coordonnées tangentielles et une coordonnée normale et on se ramène au cas du demi-espace ci-dessus.

Méthode de Calderón

Les opérateurs pseudo-différentiels sont adaptés à l'étude des problèmes elliptiques. Connus sous le nom de la méthode de Calderón, un problème aux limites elliptique se ramène en un problème pseudo-différentiel sur le bord. Les traces de toute solution sont liées par un projecteur; ce qui permet de paramétrer les solutions du problème par des distributions frontières et de décomposer, en somme directe, l'espace des traces.

Soit Ω un ouvert relativement compact de \mathbf{R}^n , à bord Γ de classe C^∞ et P un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$. Si $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, on note

$$u^\circ = \begin{cases} u & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ 0 & \text{dans } \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

on a alors la formule de sauts $Pu^\circ = (Pu)^\circ + N \cdot (\gamma u)$ où N est un opérateur linéaire continu $\mathcal{E}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{D}'_\Gamma(\mathbf{R}^n)$ indépendant de u . Si Q est une paramétrix de P alors : $u^\circ = Q \cdot (Pu)^\circ + Q \cdot (N \cdot (\gamma u))$ on montre alors que Q possède la propriété de transmission, i.e. la distribution Qf° a une restriction à Ω , qui est une fonction C^∞ admettant, ainsi que toute ses dérivées, une limite en tout point de Γ , i.e. conserve la régularité jusqu'au bord.

Si $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $\begin{cases} Pu = f \\ \gamma u = g \end{cases}$ alors $g = \gamma(Qf^\circ) + \gamma(Q(N \cdot g))$ on montre

que l'opérateur matriciel $C : g \mapsto \gamma(Q(N \cdot g))$ est un opérateur pseudo-différentiel et un projecteur, appelé projecteur de Calderón relatif à la paramétrix Q .

le cas d'un demi espace \mathbf{R}_+^3 : Posons

$$u^\circ(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_3 \geq 0, \\ 0 & \text{si } x_3 < 0. \end{cases}$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_3} u^\circ, \varphi \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_3} u \right)^\circ, \varphi \right\rangle + \int_{\mathbf{R}^2} u(x', 0) \varphi(x', 0) dx' \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_3} u \right)^\circ, \varphi \right\rangle + \langle \gamma_0 u \otimes \delta_{(x_3=0)}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} \partial_{x_3} u^\circ &= (\partial_{x_3} u)^\circ + \gamma_0 u \otimes \delta_{(x_3=0)} \text{ et } \partial_{x_3}^2 u^\circ \\ &= (\partial_{x_3}^2 u)^\circ + \gamma_0 u \otimes \delta'_{(x_3=0)} + \gamma_1 u \otimes \delta_{(x_3=0)} \end{aligned}$$

d'autre part, puisque les dérivées tangentielles ne donnent aucun saut, on a

$$(\Delta + k^2)u^\circ = ((\Delta + k^2)u)^\circ + \gamma_0 u \otimes \delta'_{(x_3=0)} + \gamma_1 u \otimes \delta_{(x_3=0)}$$

par suite, si Q est une paramétrix de $\Delta + k^2$ et si $(\Delta + k^2)u = f$ alors :

$$(7) \quad u^\circ + Ru^\circ = Qf^\circ + Q(\gamma_0 u \otimes \delta'_{(x_3=0)}) + Q(\gamma_1 u \otimes \delta_{(x_3=0)})$$

où R est un opérateur régularisant.

THÉORÈME 12. *L'opérateur $K : u \mapsto Q(u \otimes \delta) |_{\mathbf{R}_+^3}$ est continu de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}_+^3)$ et si $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ alors Ku a des traces sectionnelles de tout ordre.*

Démonstration. Si $q(\xi) = \frac{1}{k^2 - |\xi|^2}$ pour $|\xi|$ grand, alors l'opérateur pseudo-différentiel associé est une paramétrix de $\Delta + k^2$ et on a

$$\frac{1}{k^2 - |\xi|^2} = \sum_{m=0}^J \frac{-k^{2m}}{|\xi|^{2m+2}} + \frac{k^{2J+2}}{|\xi|^{2J+2} (k^2 - |\xi|^2)}, \quad \forall J \geq 0$$

c'est-à-dire $\frac{1}{k^2 - |\xi|^2} \sim \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{-k^{2m}}{|\xi|^{2m+2}}$. Posons

$$R_J(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{k^2 - |\xi|^2} & \text{si } |\xi| < 1, \\ \frac{1}{k^2 - |\xi|^2} - \sum_{m=0}^J \frac{-k^{2m}}{|\xi|^{2m+2}} & \text{si } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

et soient $u \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbf{R}}_+^3)$ et $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle Qu, \Phi \rangle &= \sum_{m=0}^J (2\pi)^{-3} \int_{|\xi| \geq 1} \hat{u}(\xi) \left(\int_{\mathbf{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{-k^{2m}}{|\xi|^{2m+2}} \Phi(x) dx \right) d\xi \\ &\quad + (2\pi)^{-3} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{u}(\xi) \left(\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} R_J(\xi) \Phi(x) dx \right) d\xi \end{aligned}$$

il suffit maintenant d'étudier $\langle A_m u, \Phi \rangle = \int_{|\xi| \geq 1} \hat{u}(\xi) \left(\int_{\mathbf{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{1}{|\xi|^{2m}} \Phi(x) dx \right) d\xi$. Comme la fonction $F(\xi', \xi_3) = \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{1}{|\xi|^{2m}} \Phi(x) dx$ est à décroissance rapide en ξ , pour $\xi' \in \mathbf{R}^2$ et $\text{Im} \xi_3 \geq 0$ et la fonction $\hat{u}(\xi', \xi_3)$ est à décroissance lente, on a alors par le théorème des résidus, si $\text{supp} \Phi \subset \mathbf{R}_+^3$

$$\langle A_m u, \Phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} d\xi' \int_{\Gamma_{\xi'}} \hat{u}(\xi', z) F(\xi', z) dz$$

où $\Gamma_{\xi'} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R|\xi'| \text{ et } \text{Im} z \geq 0\} \cup [-R|\xi'|, R|\xi'|]$ chemin qui entoure le pôle de $z \mapsto \frac{1}{(|\xi'|^2 + z^2)^m}$, avec $\text{Im} z \geq 0$. Si on prend $\Phi(x) = \varphi(x') \otimes \psi(x_3)$ avec $\text{supp} \psi \subset \mathbf{R}_+$, on aura

$$\begin{aligned} \langle A_m u, \varphi \otimes \psi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^2} d\xi' \int_{\Gamma_{\xi'}} \hat{u}(\xi', z) \left(\int_{\mathbf{R}^3} e^{i\langle x, (\xi', z) \rangle} \frac{1}{(|\xi'|^2 + z^2)^m} \varphi(x') \psi(x_3) dx' dx_3 \right) dz = \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} \psi(x_3) dx_3 \int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{\Gamma_{\xi'}} \hat{u}(\xi', z) dz \int_{\mathbf{R}^2} e^{i\langle x, (\xi', z) \rangle} \frac{1}{(|\xi'|^2 + z^2)^m} \varphi(x') dx' \right) d\xi' \end{aligned}$$

de là on déduit que $A_m u \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2))$. En effet, $A_m u$ coïncide, sur $\overline{\mathbf{R}}_+$, avec la fonction C^∞

$$x_3 \mapsto \varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{\Gamma_{\xi'}} \hat{u}(\xi', z) dz \int_{\mathbf{R}^2} e^{i\langle x, (\xi', z) \rangle} \frac{1}{(|\xi'|^2 + z^2)^m} \varphi(x') dx' \right) d\xi'$$

□

D'après (7) on a :

$$\begin{aligned} \gamma_0 u &= \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} u^\circ = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} Qf^\circ + \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} Q \left(\gamma_0 u \otimes \delta'_{(x_3=0)} \right) \\ &\quad + \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} Q \left(\gamma_1 u \otimes \delta_{(x_3=0)} \right) - \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} Ru^\circ \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_1 u = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3} u^\circ = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3} Q f^\circ + \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3} Q \left(\gamma_0 u \otimes \delta'_{(x_3=0)} \right) \\ + \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3}^Q \left(\gamma_1 u \otimes \delta_{(x_3=0)} \right) - \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3} R u^\circ \end{aligned}$$

Nous allons montrer que les opérateurs du type :

$$u \mapsto \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3}^\mu Q \left(u \otimes \delta_{(x_3=0)}^{(v)} \right), \quad \text{pour } \mu, v = 0, 1 \text{ et } u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$$

sont des opérateurs pseudo-différentiels.

THÉORÈME 13. *On a les résultats suivants :*

1. *L'opérateur $Su(x') = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} Q(u \otimes \delta_{(x_3=0)})(x', x_3)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 , de symbole principal $s(\xi') = -1/2|\xi'|$.*
2. *L'opérateur $Du(x') = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} Q(\partial_{x_3}(u \otimes \delta_{(x_3=0)}))(x', x_3)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 , de symbole principal $d(\xi') = 1/2$.*
3. *L'opérateur $D'u(x') = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_n} Q(u \otimes \delta_{(x_3=0)})(x', x_3)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 , de symbole principal $d'(\xi') = 1/2$.*
4. *L'opérateur $Tu(x') = \lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \partial_{x_3} Q(\partial_{x_3}(u \otimes \delta_{(x_3=0)}))(x', x_3)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 , de symbole principal $t(\xi') = -|\xi'|/2$.*

Démonstration. Comme le symbole complet de la paramétrix Q est donné par $q(\xi) \sim \sum_{m \geq 0} \frac{-k^{2m}}{|\xi|^{2m+2}}$, on a donc

$$\partial_{x_3}^\mu Q \left(u \otimes \delta_{(x_3=0)}^{(v)} \right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{-k^{2m}}{|\xi|^{2m+2}} \right) \hat{u}(\xi') (i\xi_n)^{\mu+v} d\xi + R_1 u$$

où R_1 est un opérateur régularisant. Il suffit donc de calculer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{-k^{2m} (i\xi_3)^{\mu+v}}{|\xi|^{2m+2}} \hat{u}(\xi') d\xi = \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} e^{i\langle x', \xi' \rangle} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_3 \xi_3} \frac{-k^{2m} (i\xi_3)^{\mu+v}}{(|\xi'|^2 + \xi_3^2)^{m+1}} d\xi_3 \right) \hat{u}(\xi') d\xi' \end{aligned}$$

et de faire tendre x_3 vers 0 par valeurs supérieures. le calcul s'achève à l'aide d'un calcul de résidu au point $z = i\lambda$ dans le lemme suivant :

LEMME 3. *Pour tout $\lambda > 0$ on a*

1.

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixz}}{(z^2 + \lambda^2)^{m+1}} dz \\ &= \left(\sum_{k=0}^m \frac{C_{m+k}^k}{(m-k)!} \cdot \frac{1}{(2x\lambda)^k} \right) \cdot \left(\frac{x}{2\lambda} \right)^m \cdot \frac{e^{-x\lambda}}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_m(x) = \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^{2m+1}}$$

2. pour $m \geq 2$

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iz e^{ixz}}{(z^2 + \lambda^2)^{m+1}} dz = - \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{m-1} e^{-\lambda x} / 4\lambda^2 \left(\frac{\lambda x}{m!} + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(m+k)!}{m!(k+1)!(m-k-2)!} \cdot \frac{1}{(2\lambda x)^k} \right),$$

$$J_0(x) = -e^{-\lambda x}/2, J_1(x) = \frac{-xe^{-\lambda x}}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} J_m(x) = \begin{cases} -1/2, & m = 0 \\ 0, & m \geq 1 \end{cases}$$

3.

$$K_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-z^2 e^{ixz}}{(z^2 + \lambda^2)^{m+1}} dz = \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{m-1} \frac{e^{-\lambda x}}{2\lambda} \left(\frac{\lambda x}{2} \sum_{k=0}^m \frac{C_{m+k}^m}{(m-k)!} \cdot \frac{1}{(2\lambda x)^k} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_{m+k-1}^{m-1}}{(m-k-1)!} \cdot \frac{1}{(2\lambda x)^k} \right)$$

$$K_0(x) = \lambda e^{-\lambda x}/2, \lim_{x \rightarrow 0} K_m(x) = \begin{cases} \lambda/2, & m = 0 \\ \frac{-m(2m-2)!}{2^{2m}(m!)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^{2m-1}}, & m \geq 1 \end{cases}$$

Le théorème s'en déduit en prenant $\lambda = |\xi'|$. □

Le cas d'un ouvert à bord : Soit Ω un ouvert à bord Γ compact et de classe C^∞ , paramétré par ϕ , et soit η un champ normal extérieur à Ω . Sur un voisinage tubulaire de la surface Γ ,

$$U_\delta = \{x \in \mathbf{R}^3, x = \phi(s) + r\eta(\phi(s)), -\delta < r < \delta\},$$

on a

$$u(x) = v(s, r), \quad u^\circ = v^\circ = \begin{cases} v(s, r) & \text{si } 0 \leq r < \delta \\ 0 & \text{si } -\delta < r < 0 \end{cases}$$

$\gamma_0 u = v(s, 0)$ et $\gamma_1 u = \partial_r v(s, 0)$.

Dans U_δ on a $(\Delta + k^2) \cdot u = \partial_r^2 v - 2H_r \partial_r v + \Delta_0 v + k^2 v$ où Δ_0 est l'opérateur de Laplace-Beltrami (qui comporte que des dérivées tangentielles) et H_r est la courbure moyenne de la surface parallèle $\Gamma_r = \{x \in \mathbf{R}^3, x = \phi(s) + r\eta(\phi(s))\}$. Notons que $H_r = \frac{Kr+H}{Kr^2+2Hr+1}$ où K et H sont, respectivement, la courbure de Gauss et la courbure moyenne de Γ , voir [2]. Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \cdot u^\circ &= \partial_r^2 v^\circ - 2H_r \partial_r v^\circ + \Delta_0 v^\circ + k^2 v^\circ \\ &= (\partial_r^2 v)^\circ + \partial_r v(s, 0) \otimes \delta_{(r=0)} + v(s, 0) \otimes \partial_r \delta_{(r=0)} \\ &\quad - 2H_r ((\partial_r v)^\circ + v(s, 0) \otimes \delta_{(r=0)}) + \Delta_0 v^\circ + k^2 v^\circ \end{aligned}$$

donc $(\Delta + k^2) \cdot u^\circ = f^\circ + v(s, 0) \otimes (\partial_r - 2H_r) \delta_{(r=0)} + \partial_r v(s, 0) \otimes \delta_{(r=0)}$,
 $u^\circ = Q.f^\circ + Q(v(s, 0) \otimes (\partial_r - 2H_r) \delta_{(r=0)}) + Q(\partial_r v(s, 0) \otimes \delta_{(r=0)}) + R.u^\circ$ et

$$\begin{aligned} \gamma_0 v &= \gamma_0 Q.f^\circ + \lim_{r \rightarrow 0^+} Q(v(s, 0) \otimes (\partial_r - 2H_r) \delta_{(r=0)}) \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow 0^+} Q(\partial_r v(s, 0) \otimes \delta_{(r=0)}) + \gamma_0 R u^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 v &= \gamma_1 Q.f^\circ + \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r Q(v(s, 0) \otimes (\partial_r - 2H_r) \delta_{(r=0)}) \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r Q(\partial_r v(s, 0) \otimes \delta_{(r=0)}) + \gamma_1 R u^\circ \end{aligned}$$

Le Théorème 13 permet d'écrire :

1. $D : v \mapsto \lim_{r \rightarrow 0^+} Q(v \otimes (\partial_r - 2H_r) \delta_{(r=0)})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de symbole principal $D(\xi') = 1/2 + H/|\xi'|$.
2. $S : v \mapsto \lim_{r \rightarrow 0^+} Q(v \otimes \delta_{(r=0)})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 , de symbole principal $S(\xi') = -1/2|\xi'|$.
3. $T : v \mapsto \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r Q(v \otimes (\partial_r - 2H_r) \delta_{(r=0)})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1, de symbole principal $T(\xi') = -H - |\xi'|/2$.
4. $D' : v \mapsto \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r Q(v \otimes \delta_{(r=0)})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de symbole principal $D'(\xi') = 1/2$.

Finalement

$$\begin{aligned} \gamma_0 u &= \gamma_0 Q.f^\circ + D\gamma_0 u + S\gamma_1 u + \gamma_0 R.u^\circ \\ \gamma_1 u &= \gamma_1 Q.f^\circ + T\gamma_0 u + D'\gamma_1 u + \gamma_1 R.u^\circ \end{aligned}$$

où S, D, D', T sont des opérateurs pseudo-différentiels.

L'opérateur matriciel $C = \begin{pmatrix} D & S \\ T & D' \end{pmatrix}$ est un projecteur dans le sens $C^2 - C$ est régularisant, on a pour les symboles principaux

$$\sigma_{C^2 - C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{H}{|\xi'|} & \frac{-1}{2|\xi'|} \\ -H - \frac{|\xi'|}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{H}{|\xi'|} & \frac{-1}{2|\xi'|} \\ -H - \frac{|\xi'|}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{H^2}{|\xi'|^2} + \frac{H}{2|\xi'|} & \frac{-H}{2|\xi'|^2} \\ \frac{-H}{2} - \frac{H^2}{|\xi'|} & \frac{H}{2|\xi'|} \end{pmatrix}$$

Ceci permet de trouver une relation entre les données Dirichlet et Neumann du problème de Helmholtz, ce qui donne l'essence même de la méthode des équations intégrales.

4.2. Méthode des équations intégrales

On introduit ici les potentiels de simple et de double couche, pour étudier le problème de Dirichlet et de Neumann. Soit Ω un ouvert à bord compact et connexe. La solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz est donnée par

$$E_k(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}$$

Les potentiels de simple et de double couche, d'une fonction ϕ définie sur le bord Γ , sont donnés pour tout $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$,

$$S(x) = \int_{\Gamma} E_k(x,y)\phi(y) d\mu(y)$$

$$D(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x,y)\phi(y) d\mu(y)$$

Pour une fonction v définie sur $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$ et pour $x \in \Gamma$ on note $v_+(x)$, respectivement $v_-(x)$, la limite, lorsqu'elle existe, de $v(z)$ lorsque z tend vers x pour $z \in \Omega^c = \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, respectivement $z \in \Omega$. On a les formules de sauts à travers la surface Γ

PROPOSITION 1. Pour $x \in \Gamma$, on a

1. $S_+(x) = S_-(x) = S_k\phi(x)$ et $\frac{\partial}{\partial \eta} S_{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2}\phi(x) + D'_k\phi(x)$.
2. $D_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2}\phi(x) + D_k\phi(x)$ et $\frac{\partial}{\partial \eta} D_{\pm}(x) = \frac{\partial}{\partial \eta} D_{\mp}(x) = T_k\phi(x)$.

où S_k, D_k, D'_k et T_k sont les opérateurs frontières

$$S_k\phi(x) = \int_{\Gamma} E_k(x,y)\phi(y) d\mu(y)$$

$$D_k\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x,y)\phi(y) d\mu(y)$$

$$D'_k\phi(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k}{\partial \eta(x)}(x,y)\phi(y) d\mu(y)$$

$$T_k\phi(x) = \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x,y)\phi(y) d\mu(y)$$

Démonstration. Voir M.E Taylor [21], pages 33-41. □

PROPOSITION 2. 1. S_k est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 , elliptique et auto-adjoint.

2. D_k et son adjoint D'_k sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre -1 .
3. T_k est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 , elliptique et auto-adjoint.

Démonstration. Voir M.E Taylor [21], pages 33-41. □

Projecteurs de Calderón

Le théorème de représentation et les formules de sauts conduisent à l'équation suivante sur le bord :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\text{id} + D_k & -S_k \\ T_k & \frac{1}{2}\text{id} - D'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix}$$

On déduit que :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D_k & -2S_k \\ 2T_k & -2D'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix}$$

Cet opérateur matriciel est dit *projecteur de Calderón*, les données de Dirichlet et de Neumann sont liées par deux équations intégrales sur le bord, il est crucial de noter qu'on peut choisir judicieusement une combinaison des deux équations intégrales en cas où l'une des deux n'est pas uniquement résoluble.

Opérateurs de Fredholm

Un opérateur $T : E \rightarrow F$, entre deux espaces de Banach, est de *Fredholm* s'il est continu et admet un inverse "paramétrixe" modulo les opérateurs compacts. Dans ce cas le noyau et le co-noyau de T sont de dimension finie et l'image de T est fermée. On définit l'*indice* de T par

$$\text{ind}T = \dim(\ker T) - \dim(F/\text{Im}T)$$

Si on note :

$$\begin{aligned} \text{Fred}(E, F) &= \{T : E \rightarrow F, \text{ opérateur de Fredholm}\} \\ \text{Comp}(E, F) &= \{T : E \rightarrow F, \text{ opérateur compact}\} \end{aligned}$$

On a les propriétés essentielles suivantes :

PROPOSITION 3. 1. Si $T \in \text{Fred}(E, F)$ alors $T^* \in \text{Fred}(F', E')$ et $\text{ind}T^* = -\text{ind}T$.

2. Si $T \in L(E, F)$ et $S_1, S_2 \in L(F, E)$ tels que

$$S_1T - \text{id}_E \in \text{Comp}(E) \quad \text{et} \quad TS_2 - \text{id}_F \in \text{Comp}(F)$$

alors T est de *Fredholm*.

3. Si $T \in \text{Fred}(E, F)$ et $K \in \text{Comp}(E, F)$, alors $T + K \in \text{Fred}(E, F)$.

4. Si $T \in \text{Fred}(E, F)$ et $S \in \text{Fred}(F, G)$ alors $ST \in \text{Fred}(E, G)$ et

$$\text{ind}ST = \text{ind}S + \text{ind}T$$

5. $\text{ind} : \text{Fred}(E, F) \rightarrow \mathbf{Z}$ est continue donc constante sur chaque composante connexe de $\text{Fred}(E, F)$. En particulier, si $T \in \text{Fred}(E, F)$ et $K \in \text{Comp}(E, F)$, alors $\text{ind}(T + K) = \text{ind}T$.

Démonstration. Voir J.C Saut [20]. □

L'existence d'une paramétrixe pour un opérateur elliptique va entraîner la chose importante suivante

THÉORÈME 14. Soit A un opérateur pseudo-différentiel elliptique, d'ordre m sur une variété compacte M , alors

1. A est un opérateur de *Fredholm* de $H^s(M)$ dans $H^{s-m}(M)$ pour tout s .

2. $\text{ind}A$ dépend seulement du symbole principal σ_A , et non de s .

Démonstration. 1. Si Q est une paramétrix de A alors $QA - I$ et $AQ - I$ sont régularisants donc compacts (grâce au lemme de Rellich), par suite A est de Fredholm.

2. Comme A et A^* sont elliptiques, alors $\ker A \subset C^\infty(M)$ et $H^{s-m}(M)/\text{Im}A \simeq \ker A^* \subset C^\infty(M)$ et ceci indépendamment de s . $A = \bar{A} + R$ où \bar{A} est l'opérateur associé au symbole principal de A et R est d'ordre strictement inférieur à m , R est donc compact et par conséquent $\text{ind}A = \text{ind}\bar{A}$.

□

Représentation de Brakhage-Werner

Problème de Dirichlet extérieur Lorsqu'on utilise le potentiel de simple couche pour traiter le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = 0, & \text{sur } \Omega^c \\ \gamma_0 u = g, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

on est amené à résoudre l'équation intégrale :

$$S_k(\gamma_1 u)(x) = \left(-\frac{1}{2}\text{id} + D_k\right)g(x), \quad x \in \Gamma$$

L'opérateur $S_k : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma)$ est un isomorphisme si et seulement si $-k^2$ n'est pas valeur propre du problème de Dirichlet intérieur. En effet, Comme S_k est un opérateur pseudo-différentiel elliptique et auto-adjoint, il est de Fredholm d'indice nul ; il est donc bijectif si et seulement s'il est injectif (resp. surjectif). D'autre part si w est une solution, non identiquement nulle, du problème de Dirichlet intérieur

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -k^2 u(x), & x \in \Omega \\ u|_\Gamma \equiv 0 \end{cases}$$

et d'après la représentation intégrale $w = -D(\gamma_0 w) + S(\gamma_1 w)$, $\gamma_1 w \not\equiv 0$. On déduit de la formule de saut que $S_k(\gamma_1 w) \equiv 0$, ce qui veut dire que S_k n'est pas un isomorphisme. On peut considérer l'autre équation intégrale

$$\left(\frac{1}{2}\text{id} + D'_k\right)(\gamma_1 u)(x) = T_k g(x), \quad x \in \Gamma$$

de même, on montre que l'opérateur $L = \frac{1}{2}\text{id} + D'_k$ est bijectif si et seulement si $-k^2$ n'est une valeur propre du problème de Neumann intérieur. La question de savoir si un réel donné est valeur propre du laplacien n'est simple que pour des géométries du domaine particulières. Pour éviter cette difficulté, qui est due à la méthode et non à la nature du problème, il est nécessaire de développer des méthodes qui donnent des équations intégrales uniquement résolubles pour tout nombre d'ondes $k > 0$. On a

développé essentiellement deux approches, la première consiste à faire une représentation intégrale avec une solution fondamentale modifiée, la seconde, qui nous intéresse ici et qui est due à Brakhage et Werner, consiste à faire une représentation en potentiel simple et double couche combinés. Si on cherche u sous la forme

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x-y) - iE_k(x-y) \right) \phi(y) d\mu(y), \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

alors, u est solution du problème de Dirichlet extérieur si et seulement si

$$(\text{id} + 2D_k - 2iS_k)\phi = 2g.$$

Comme $D_k, S_k : H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma)$ sont compacts, alors $\text{id} + 2D_k - 2iS_k$ est de Fredholm d'indice nul ; pour montrer que c'est un isomorphisme il suffit de montrer qu'il est injectif. Si $\phi \in \ker(\text{id} + 2D_k - 2iS_k)$, i.e. $u_+ \equiv 0$ alors $u \equiv 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, par unicité du problème extérieur. Les formules de sauts donnent $-u_- = \phi$ et $-\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_- = i\phi$, la première formule de Green donne

$$i \int_{\Gamma} |\phi(y)|^2 d\mu(y) = \int_{\Gamma} u_-(y) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_-(y) d\mu(y) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^2 - k^2 |u(x)|^2 \right) dx$$

en prenant la partie imaginaire de part et d'autre, on déduit que $\phi \equiv 0$, d'où la bijectivité de $\text{id} + 2D_k - 2iS_k$ et

$$u(x) = 2 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x-y) - iE_k(x-y) \right) (\text{id} + 2D_k - 2iS_k)^{-1} g(y) d\mu(y)$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet extérieur et elle dépend continûment de g pour la norme de la convergence uniforme.

Le problème de Neumann extérieur On cherche u sous la forme

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(E_k(x-y)\phi(y) + i \frac{\partial E_k}{\partial \eta(y)}(x-y) S_0^2 \phi(y) \right) d\mu(y)$$

où S_0 est le potentiel de simple couche pour $k = 0$. u est solution du problème de Neumann extérieur

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = 0, & \text{sur } \Omega^c \\ \gamma_1 u = g, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

si et seulement si

$$(\text{id} - 2D'_k - 2iT_k S_0^2)\phi = -2g.$$

L'opérateur $D'_k + iT_k S_0^2 : H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Omega)$ étant compact, pour montrer que $\text{id} - 2D'_k - 2iT_k S_0^2$ est un isomorphisme, il suffit alors de vérifier son injectivité. Si $\phi \in \ker(\text{id} -$

$2D'_k - 2iT_k S_0^2$, i.e. $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_+ \equiv 0$ alors $u \equiv 0$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, par unicité du problème extérieur. Les formules de sauts donnent

$$-u_- = -iS_0^2 \phi \quad \text{et} \quad -\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_- = -\phi,$$

la formule de Green donne

$$\begin{aligned} i \int_{\Gamma} |S_0 \phi(y)|^2 d\mu(y) &= i \int_{\Gamma} \phi S_0^2 \bar{\phi}(y) d\mu(y) \\ &= \int_{\Gamma} u_-(y) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_-(y) d\mu(y) = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 - k^2 |u(x)|^2) dx \end{aligned}$$

de là on a $S_0 \phi \equiv 0$ et par le principe du maximum pour les fonctions harmoniques on déduit que $\phi \equiv 0$. Finalement, le problème de Neumann extérieur admet l'unique solution

$$\begin{aligned} u(x) = -2 \int_{\Gamma} \left(E_k(x-y) (\text{id} - 2D'_k - 2iT_k S_0^2)^{-1} + \right. \\ \left. i \frac{\partial E_k}{\partial \eta}(y)(x-y) S_0^2 (\text{id} - D'_k - iT_k S_0^2)^{-1} \right) g(y) d\mu(y) \end{aligned}$$

qui dépend continûment de g pour la norme de la convergence uniforme.

5. Conclusion

Le problème de Helmholtz extérieur avec condition de Dirichlet, ou de Neumann, est bien posé au sens de *Hadamard*, i.e. on a existence, unicité et dépendance continue de la solution par rapport aux données. La recherche et la mise en œuvre des méthodes numériques, adaptées aux problèmes de Helmholtz extérieur, sont donc justifiées et la méthode des équations intégrales en est l'exemple le plus approprié. Cette méthode permet de ramener un problème posé sur un domaine non borné en un autre, plus facile, posé sur un domaine borné et de dimension inférieure. Toutefois, les opérateurs frontières qui donnent la solution sont des opérateurs pseudo-différentiels *non locaux*, ce qui entraîne que les systèmes discrets résultants, sont constitués de matrices *plaines*. L'inversion de ce type de matrice est un vrai défi pour les numériciens et nécessite des techniques particulières de préconditionnement ou d'accélération de convergence, dites méthodes de **fast-multipôle**.

Nous avons constaté, tout au long de ce travail, la puissance de l'analyse microlocale. Il nous paraît très intéressant, et une continuation de ce travail, de considérer les problèmes de Helmholtz inverses et d'étudier de près les opérateurs Dirichlet-to-Neumann DtN et l'opérateur $F : u \mapsto u_\infty$ qui relie la solution du problème de Helmholtz extérieur à son champ acoustique lointain. Il sera crucial de pouvoir utiliser l'analyse

microlocale et les méthodes numériques, qui y sont adaptées, pour régler quelques problèmes de Helmholtz inverses.

Notons enfin qu'il sera très intéressant d'adapter le calcul pseudo-différentiel à des géométries moins régulières, étant donné que la physique mathématique est riche en situations singulières, notamment lipschitziennes et la théorie des opérateurs pseudo-différentielle, telle exposée ici, ne permet guère mieux que d'atteindre des résultats mod. C^∞ .

Références

- [1] AMINI S. ET KIRKUP S.M., *Solution of Helmholtz Equation in the exterior domain by elementary boundary integral methods*, J. Comp. Phys **118** (1995), 202–221.
- [2] ANTOINE X., BARUCQ H. ET BENDALI A., *Bayliss-Turkel-Like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape*, J. Math. Anal. and Applications **229** (1999), 184–211.
- [3] BOUTET DE MONVEL L., *Opérateurs pseudo-différentiels et formule de l'indice*, Cours de D.E.A., Université de Nice U.E.R.M.S.T., (1970-1971).
- [4] CHAZARAIN J. ET PIRIOU A., *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris 1981.
- [5] CHEN G. ET ZHOU J., *Boundary element methods*, Academic Press. Harcourt Brace, Jovanovitch Publishers, 1992.
- [6] COLTON D. ET KRESS R., *Integral equation methods in scattering theory*, John Wiley and Sons Inc, New York 1983.
- [7] COLTON D. ET KRESS R., *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin 1992.
- [8] COSTABEL M. ET WENDLAND W.L., *Strong ellipticity of boundary integral operators*, J. Reine. Angew. Math **372** (1986), 34–63.
- [9] DO CARMO M.P., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [10] GRIGIS A. ET SJOSTRAND J., *Introduction à l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles*, Paris Onze, ed. Orsay 1991.
- [11] HORMANDER L., *The analysis of linear partial differential operators*, Vol I-IV, Springer Verlag 1983-1985.
- [12] HORMANDER L., *Pseudodifferential operators and non-elliptic problems*, Ann. Math **83** (1966), 129–203.
- [13] HORMANDER L., *Fourier integral operators*, Acta. Math **127** (1971), 79–183.
- [14] HSIAO G.C. ET WENDLAND W.L., *Boundary integral methods in low frequency acoustics*, J.Chinese Institute of Engineers, **23** 3 (2000), 369–375.
- [15] JOSHI M.S., *Introduction to pseudodifferential operators* (1999), <http://xxx.lanl.gov/ps/math.AP/9906155>.
- [16] KIRSCH A., *Surface gradients and continuity properties for some integral operators in classical scattering theory*, Math. Meth. App. Sci **8** (1989), 789–804.
- [17] LEVADOUX D., *Etude d'une équation intégrale adaptée à la résolution haute fréquence de l'équation de helmholtz*, Thèse de Doctorat, Paris VI 2001.
- [18] MCLEAN W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [19] NIRENBERG L., *Lecture on linear partial differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, A.M.S 1971.
- [20] SAUT J.C., *Opérateurs et applications fredholm*, Publications Mathématiques d'Orsay **76-77** (1977).
- [21] TAYLOR M.E., *Partial differential equations II*, Springer (1996).

AMS Subject Classification : 31B10, 35J05, 35J40, 35S05, 35S15, 47G30.

Mohamed Amine BAHAYOU, Département de Mathématiques, Université Kasdi Marbah, Route de Ghardaïa, 30000, Algérie
e-mail : amine_bahayou@yahoo.fr

Lavoro pervenuto in redazione il 09.03.2006 e, in forma definitiva, il 01.02.2007.