Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 65, 4 (2007)

A. Lesfari

ÉTUDE DES SOLUTIONS MÉROMORPHES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Résumé. In this paper we shall study differential equations in the complex domain. The method of indeterminate coefficients and the majorant method lead to a proof of the existence and uniqueness of meromorphic solution of differential equations. We discuss their connection with the concept of algebraic integrability systems.

1. Position du problème

Dans cet article, nous envisagerons l'étude des équations différentielles dans le domaine complexe. Soit le système d'équations différentielles non-linéaires

$$\frac{dw_1}{dz} = f_1\left(z, w_1, ..., w_n\right), ..., \frac{dw_n}{dz} = f_n\left(z, w_1, ..., w_n\right) \tag{1}$$

où $f_1, ..., f_n$ sont des fonctions de $n+1$ variables complexes $z, w_1, ..., w_n$ et qui appliquent un domaine de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$. Le problème de Cauchy consiste en la recherche d'une solution $(w_1(z), ..., w_n(z))$ dans un voisinage d'un point z_0, passant par le point donné $\left(z_0, w_1^0, ..., w_n^0\right)$ c'est-à-dire satisfaisant aux conditions initiales

$$w_1(z_0) = w_1^0, ..., w_n(z_0) = w_n^0.$$

Notons que le système (1) peut s'écrire sous forme vectorielle dans $\mathbb{C}^n$

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w(z)),$$

en posant $w = (w_1, ..., w_n)$ et $f = (f_1, ..., f_n)$. Dans ce cas, le problème de Cauchy consistera à déterminer la solution $w(z)$ telle que

$$w(z_0) = w_0 = (w_1^0, ..., w_n^0).$$

Commençons tout d'abord par décrire quelques résultats connus. On sait que lorsque les fonctions $f_1, ..., f_n$ sont holomorphes au voisinage du point $\left(z_0, w_1^0, ..., w_n^0\right)$ alors le problème de Cauchy admet une solution holomorphe et une seule. Une question naturelle se pose : le problème de Cauchy peut-il admettre quelque solution non holomorphe au voisinage du point $\left(z_0, w_1^0, ..., w_n^0\right)$? Lorsque les fonctions $f_1, ..., f_n$ sont holomorphes, la réponse est négative. D'autres circonstances peuvent se produire pour le problème de Cauchy relatif au système d'équations différentielles (1), lorsque l'hypothèse d'holomorphie relative aux fonctions $f_1, ..., f_n$ n'est plus satisfaite au voisinage d'un point. On constate dans une telle éventualité que les comportements des solutions peuvent revêtir les aspects les plus divers. En général, les singularités des solutions sont de deux types : mobiles ou fixes, suivant qu'elles dépendent ou non des conditions initiales. Des résultats importants ont été obtenus par Painlevé [12]. Supposons par exemple que le système (1) s'écrit sous la forme

$$\frac{dw_1}{dz}=\frac{P_1(z,w_1,\ldots,w_n)}{Q_1(z,w_1,\ldots,w_n)},\ldots,\frac{dw_n}{dz}=\frac{P_n(z,w_1,\ldots,w_n)}{Q_n(z,w_1,\ldots,w_n)},$$

avec

$$P_k\left(z,w_1,\ldots,w_n\right)=\sum_{0\leq i_1,\ldots,i_n\leq p}A^{(k)}_{i_1,\ldots,i_n}\left(z\right)w_1^{i_1}\ldots w_n^{i_n},\ 1\leq k\leq n,$$

$$Q_k\left(z,w_1,\ldots,w_n\right)=\sum_{0\leq j_1,\ldots,j_n\leq q}B^{(k)}_{j_1,\ldots,j_n}\left(z\right)w_1^{j_1}\ldots w_n^{j_n},\ 1\leq k\leq n,$$

des polynômes à plusieurs indéterminées $w_1,\ldots,w_n$ et à coefficients algébriques en z. On sait

(i) que les singularités fixes sont constituées par quatre ensembles de points. Le premier est l'ensemble des points singuliers des coefficients $A^{(k)}_{i_1,\ldots,i_n}(z)$, $B^{(k)}_{j_1,\ldots,j_n}(z)$ intervenant dans les polynômes $P_k\left(z,w_1,\ldots,w_n\right)$ et $Q_k\left(z,w_1,\ldots,w_n\right)$. En général cet ensemble contient le point $z=\infty$. Le second ensemble est constitué des points α_j tels que $Q_k\left(z,w_1,\ldots,w_n\right)=0$, circonstance qui se produit si les coefficients $B^{(k)}_{j_1,\ldots,j_n}(z)$ s'annulent tous pour $z=\alpha_j$. Le troisième est l'ensemble des points β_l tels que pour certaines valeurs $\left(w_{1'},\ldots,w_{n'}\right)$ de $\left(w_1,\ldots,w_n\right)$, on ait $P_k\left(\beta_l,w_{1'},\ldots,w_{n'}\right)=Q_k$ $\left(\beta_l,w_{1'},\ldots,w_{n'}\right)=0$. Dès lors les seconds membres du système ci dessus se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ aux points $\left(\beta_l,w_{1'},\ldots,w_{n'}\right)$. Enfin, l'ensemble des points γ_m tels qu'il existe des valeurs $u_1,\ldots,u_n$, pour lesquelles $R_k\left(\gamma_m,u_1,\ldots,u_n\right)=S_k$ $\left(\gamma_m,u_1,\ldots,u_n\right)=0$ où R_k et S_k sont des polynômes en $u_1,\ldots,u_n$ obtenus à partir de P_k et Q_k en posant $w_1=\frac{1}{u_1},\ldots,w_n=\frac{1}{u_n}$. Chacun de ces ensembles ne comporte qu'un nombre fini d'éléments. Les singularités fixes du système en question sont en nombre fini.

(ii) que les singularités mobiles de solutions de ce système sont des singularités mobiles algébriques : pôles et (ou) points critiques algébriques. Il n'y a pas de points singuliers essentiels pour la solution $\left(w_1,\ldots,w_n\right)$.

Considérant le système d'équations différentielles (1), peut-on trouver des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions méromorphes ? Nous établirons un théorème d'existence et d'unicité pour la solution du problème de Cauchy relatif au système d'équations différentielles (1), en faisant appel à la méthode des coefficients indéterminés. La solution sera explicitée sous la forme d'une série de Laurent. Il se posera dès lors le problème de la convergence. Celui-ci sera résolu par la méthode des fonctions majorantes (pour cette notion voir par exemple [3], [7]). Nombreux sont les problèmes, aussi bien théorique que pratique, ou apparaissent des équations différentielles dont le second membre n'est pas holomorphe. Nous verrons, dans la dernière section, que les solutions méromorphes dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres jouent un rôle crucial dans l'étude des équations différentielles dites algébriquement intégrables.

2. Existence et unicité de solutions méromorphes

Dans ce qui suivra, nous envisagerons le problème de Cauchy relatif au système normal (1) dans l'hypothèse où $f_1,\dots,f_n$ ne dépendent pas explicitement de z c'est-à-dire

$$\frac{dw_1}{dz} = f_1(w_1,\dots,w_n),\dots,\frac{dw_n}{dz} = f_n(w_1,\dots,w_n). \tag{2}$$

On suppose que $f_1,\dots,f_n$ sont des fonctions rationnelles en $w_1,\dots,w_n$ et que le système (2) est quasi-homogène, c'est-à-dire ils existent des entiers positifs $s_1,\dots,s_n$ telles que

$$f_i(\alpha^{s_1}w_1,\dots,\alpha^{s_n}w_n) = \alpha^{s_i+1}f_i(w_1,\dots,w_n), \quad 1 \leq i \leq n,$$

pour chaque constante non nulle α. Autrement dit, le système (2) est invariant par la transformation

$$z \rightarrow \alpha^{-1}z,\ w_1 \rightarrow \alpha^{s_1}w_1,\dots,\ w_n \rightarrow \alpha^{s_n}w_n.$$

Notons que si le déterminant

$$\Delta \equiv \det\left(w_j\frac{\partial f_i}{\partial w_j} - \delta_{ij}f_i\right)_{1\leq i,j\leq n}, \tag{3}$$

est non identiquement nul, alors le choix des nombres $s_1,\dots,s_n$ est unique.
Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons, pour simplifier que $z_0 = w_0 = 0$, ce qui n'affecte pas la généralité des résultats.

THÉORÈME 1. Supposons que

$$w_i = \frac{1}{z^{s_i}}\sum_{k=0}^{\infty} c_i^{(k)}z^k, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4}$$

où $c^{(0)} \neq 0$, soit la solution formelle en séries de Laurent, obtenue par la méthode des coefficients indéteminés, du système quasi-homogène (2). Alors, les coefficients $c_i^{(0)}$ satisfont aux équations non-linéaires

$$s_ic_i^{(0)} + f_i(c_1^{(0)},\dots,c_n^{(0)}) = 0, \tag{5}$$

où $1 \leq i \leq n$, tandis que $c_i^{(1)}, c_i^{(2)},\dots$ satisfont chacun à un système d'équations linéaires de la forme

$$(\mathcal{M} - kI)c^{(k)} = \text{polynôme en} \quad c_i^{(0)},\dots,c_i^{(k-1)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 1, \tag{6}$$

où $c^{(k)} = (c_1^{(k)},\dots,c_n^{(k)})^\top$ et

$$\mathcal{M} \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(c_1^{(0)},\dots,c_n^{(0)}) + \delta_{ij}s_i\right)_{1\leq i,j\leq n},$$

est la matrice jacobienne de (5). En outre, la série (4) est convergente.

Démonstration : En substituant (4) dans (2), tout en tenant compte de la quasi-homogénéité du système, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k-s_i)c_i^{(k)}z^{k-s_i-1} &= f_i(\sum_{k=0}^{\infty}c_1^{(k)}z^{k-s_1},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}c_n^{(k)}z^{k-s_n}),\\ &= f_i(z^{-s_1}(c_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_1^{(k)}z^k),\ldots,z^{-s_n}(c_n^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_n^{(k)}z^k)),\\ &= z^{-s_i-1}f_i(c_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_1^{(k)}z^k,\ldots,c_n^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_n^{(k)}z^k).\end{aligned}$$

Ensuite, on développe le second membre comme suit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k-s_i)c_i^{(k)}z^k &= f_i(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})\sum_{k=1}^{\infty}c_j^{(k)}z^k\\ &\quad+\sum_{k=2}^{\infty}z^k\sum_{(\alpha,\tau)\in D_k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}f_i}{\partial w^{\alpha}}(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})\prod_{j=1}^{n}(c_j^{(\tau_j)})^{\alpha_j},\end{aligned}$$

où $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$,

$$|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j,\quad \alpha!=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j!,$$

$$D_k=\{(\alpha,\tau):\tau_j>0,\forall j,|\alpha|>2,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\tau_j=k\}.$$

En identifiant les termes ayant même puissance au premier et au second membre, on obtient successivement pour $k=0$ l'expression (5), pour $k=1$, $(\mathcal{M}-I)c^{(1)}=0$, et pour $k\geq 2$,

$$((\mathcal{M}-kI)c^{(k)})_i=-\sum_{(\alpha,\tau)\in D_k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}f_i}{\partial w^{\alpha}}(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})\prod_{j=1}^{n}(c_j^{(\tau_j)})^{\alpha_j},\tag{7}$$

où $\tau_j>0$, $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\tau_j=k$, ce qui conduit aux expressions (explicites) (6). La solution obtenue par la méthode des coefficients indéterminés est formelle du fait que nous l'obtenons en effectuant sur des séries, que nous supposons a priori convergentes, diverses opérations dont la validité reste à justifier. Le théorème se trouvera donc établi dès que nous aurons vérifié que ces séries sont convergentes. On utilise à cette fin la méthode des fonctions majorantes ainsi que les travaux de M. Adler-P. van Moerbeke [1] et J.P. Françoise [4]. Notons tout d'abord que des paramètres libres apparaissent soit dans le système (5) de n équations à n inconnues, lorsque celui-ci admet un ensemble continue de solutions, soit par le fait que $\lambda_i\equiv k\in\mathbb{N}^*, 1\leq i\leq n$, est une valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. Dès lors, les coefficients peuvent être vus comme étant des fonctions rationnelles sur une variété affine V, de fibre le lieu

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left\{s_i c_i^{(0)}+f_i\left(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)=0\right\}.$$

Soit $n_0\in V$ et soit K un sous-ensemble compact de V, contenant un voisinage ouvert de n_0. Notons que K peut-être muni de la topologie du plan complexe. Posons

$$A=1+\max\left\{\left|c_1^{(\tau_1)}(n_0)\right|,\left|c_2^{(\tau_2)}(n_0)\right|,\ldots,\left|c_n^{(\tau_n)}\right|(n_0)\right\},1\leq i\leq n,1\leq\tau_i\leq\lambda_n,$$

où λ_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. Soient B et C deux constantes avec $C>A$ telles que dans le compact K on ait

$$\left|\frac{\partial^\alpha f_i}{\partial w^\alpha}(n_0)\right|\leq\alpha!B^{|\alpha|},$$

$$\left|\left(\mathcal{M}\,(n_0)-k\,I_n\right)^{-1}\right|\leq C,\quad k\geq\lambda_n+1.$$

De (7) on déduit que

$$\left|c_i^{(k)}(n_0)\right|\leq C\sum_{(\alpha,\tau)\in D}B^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n}\left|c_j^{(\tau_j)}\right|^{\alpha_j},\quad k\geq\lambda_n+1.$$

Considérons maintenant la série

$$\Phi(z)=Az+\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k z^k,$$

où β_k sont des nombres réels définis inductivement par $\beta_1\equiv A$ et

$$\beta_k\equiv C\sum_{(\alpha,\tau)\in D}B^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n}\beta_{\tau_j}^{\alpha_j},\quad k\geq 2.$$

On vérifie aisément par récurrence que la série $\Phi(z)$ est une majorante pour

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_i^{(k)}z^k,\quad 1\leq i\leq n.$$

En effet, on a $\left|c_i^{(1)}\right|\leq A$. Supposons que $\left|c_i^{(j)}\right|\leq\beta_j,\,j<k,\forall i$. Alors

$$\begin{aligned}\left|c_i^{(k)}(n_0)\right| &\leq C\sum_{(\alpha,\tau)\in D}B^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n}\left|c_j^{(\tau_j)}\right|^{\alpha_j},\ k\geq\lambda_n+1,\\ &\leq C\sum_{(\alpha,\tau)\in D}B^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n}\left|\beta_{\tau_j}^{\alpha_j}\right|,\\ &= \beta_k.\end{aligned}$$

D'autre part, il résulte de la définition des nombres β_k que

$$\Phi(z) = Az + CB^2 \frac{(n\Phi(z))^2}{1 - Bn\Phi(z)}.$$

La racine

$$\Phi(z) = \frac{1 + nABz - \sqrt{(1 - 2nAB(1 + 2nBC)z + n^2A^2B^2z^2)}}{2nB(1 + nBC)},$$

fournit la majorante cherchée. D'où la possibilité d'un développement en série entière au voisinage de $z = 0$. Ceci achève la démonstration. □

REMARQUE 1. La série (4) est l'unique solution méromorphe dans le sens où cette solution résulte de ce que les coefficients $c_i^{(k)}$ se trouvent déterminés de façon univoque avec la méthode de calcul adopté.

REMARQUE 2. Le résultat du théorème précédent s'applique à l'équation différentielle quasi-homogène d'ordre n suivante :

$$\frac{d^n w}{dz^n} = f\left(w, \frac{dw}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}\right). \tag{8}$$

f étant une fonction rationnelle en $w, \frac{dw}{dz}, \ldots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}$ et

$$w(z_0) = w_1^0, \frac{dw}{dz}(z_0) = w_2^0, \ldots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}(z_0) = w_n^0.$$

En effet, l'équation (8) se ramène à un système de n équations du premier ordre en posant

$$w(z) = w_1(z), \quad \frac{dw}{dz}(z) = w_2(z), \ldots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}(z) = w_n(z).$$

On obtient ainsi

$$\frac{dw_1}{dz} = w_2, \quad \frac{dw_2}{dz} = w_3, \ldots, \frac{dw_{n-1}}{dz} = w_n, \quad \frac{dw_n}{dz} = f(w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Un tel système constitue un cas particulier du système normal (2).

3. Connection avec l'intégrabilité algébrique

Considérons un sytème hamiltonien

$$\frac{dw}{dz} = J(w)\frac{\partial H}{\partial w}, \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2m + k, \tag{9}$$

où H est l'hamiltonien et $J(w)$ est une matrice réelle antisymétrique telle que les crochets de Poisson correspondants vérifient l'identité de Jacobi :

$$\{\{H,F\},G\}+\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}=0,\forall H,F,G\in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n),$$

où

$$\{H,F\}=\sum_{i,j}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial w_i}\frac{\partial F}{\partial w_j}.$$

On suppose que le système (9) est complètement intégrable c'est-à-dire qu'il admet $m+k$ intégrales premières $H_1=H,H_2,...,H_{m+k}$ fonctionnellement indépendantes dont m intégrales sont en involution (i.e., $\{H_i,H_j\}=0,\ 1\le i,j\le m,$), k intégrales sont des fonctions de Casimir (i.e., $J\frac{\partial H_{m+i}}{\partial w}=0,\ 1\le i\le k$) et telles que pour presque tous les $a_i\in\mathbb{R}$ les variétés invariantes

$$\bigcap_{i=1}^{m+k}\{w\in\mathbb{R}^n : H_i(w)=a_i\}, \tag{10}$$

sont compactes et connexes. D'après le théorème d'Arnold-Liouville [10], les variétés (10) sont difféomorphes aux tores réels $T^m_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^m/réseau$. En outre les flots définis par les champs de vecteurs $W_{H_i}, 1\le i\le m$, sont des mouvements rectilignes sur ce tore et les équations du problème sont intégrables par quadratures.
Soient maintenant $w\in\mathbb{C}^n$, $z\in\mathbb{C}$ et $\Delta\subset\mathbb{C}^n$ un ouvert non vide de Zariski. Comme $H_1,...,H_{m+k}$ sont fonctionnellement indépendantes, alors l'application

$$\varphi=(H_1,...,H_{m+k}):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{m+k},$$

est une submersion générique sur Δ. Soit $\mathbf{I}=\varphi(\mathbb{C}^n\backslash\Delta)$, le lieu critique de φ et désignons par $adh\mathbf{I}$ l'adhérence (ou fermeture) de Zariski de $\mathbf{I}$ dans $\mathbb{C}^{m+k}$.

DÉFINITION 1. Le système (9) dont le côté droit est polynomial est algébriquement complètement intégrable si pour $a=(a_1,...,a_{m+k})\in\mathbb{C}^{m+k}\setminus adh\mathbf{I}$, la fibre

$$M\equiv\varphi^{-1}(a)=\bigcap_{i=1}^{m+k}\{w\in\mathbb{C}^n : H_i(w)=a_i\}, \tag{11}$$

est la partie affine d'une variété abélienne (i.e., un tore complexe $T^m_{\mathbb{C}}\simeq\mathbb{C}^m/réseau$ qui possède un plongement dans un espace projectif). En outre, les flots $g^z_{W_i}(w)$, $w\in M$, $z\in\mathbb{C}$, définies par les champs de vecteurs $W_{H_1},...,W_{H_m}$ sont des lignes droites sur $T^m_{\mathbb{C}}$ c'est-à-dire

$$\left[g^z_{W_i}(w)\right]_j=f_j\left(p+z(k^i_1,...,k^i_n)\right),$$

où $f_j(z_1,...,z_m)$ sont des fonctions abéliennes (méromorphes) sur le tore $T^m_{\mathbb{C}}$, $f_j(p)=w_j$, $1\le j\le n$.

Soit $\overline{M}$ la fermeture projective de M dans l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ de dimension n. Alors $\overline{M}$ n'est pas une variété abélienne puisque cette dernière n'est pas simplement connexe et ne peut donc en général être une intersection complète projective. Dès lors, pour que M soit la partie affine d'une variété abélienne, la variété $\overline{M}$ doit être singulière à l'infini. En éclatant la singularité le long du lieu atteint par le flot et en implosant la partie du lieu qui n'est pas atteint par le flot, on montre que la variété $\overline{M}$ se transforme en une variété abélienne $\widetilde{M}$ et le lieu à l'infini se transforme en une ou plusieurs sous-variétés de codimension 1. Et c'est là où le théorème de la section 2, va jouer un rôle crucial. On procède comme suit : soit $w_i \longrightarrow u_i$ une transformation birationnelle telle qu'au voisinage de $z = 0$, on ait :

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i + \circ(z), \ 1 \le i \le n-1, \\ u_n &= z + \circ\left(z^2\right), \end{aligned}$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ sont des paramètres libres. Les nouvelles variables u_i ont pour effet d'éclater la singularité de la variété projective $\overline{M}$ le long du lieu à l'infini atteint par le flot. Exprimées dans ces nouvelles variables $u_1, ..., u_n$, les équations différentielles sont régulières et holomorphes au voisinage de $u_n = 0$ tandis que les équations définissant la fibre M s'écrivent sous la forme :

$$F_i\left(u_1(z), ..., u_{n-1}(z), u_n(z)\right) = a_i, \ 1 \le i \le m+k,$$

où $F_1, ..., F_{m+k}$ sont des polynômes en w. Pour $z = 0$, on obtient

$$F_i\left(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, 0\right) = a_i, \ 1 \le i \le m+k,$$

et ces relations algébriques entre les paramètres libres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ fournissent les équations d'une sous-variété $\mathcal{D}$ qui jouera, entre autres, un rôle important dans la compactification de la fibre M. En fait, les paramètres libres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ et la sous variété $\mathcal{D}$ peuvent s'obtenir directement de la manière suivante : d'abord l'on montre l'existence de solutions $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ du système (9) sous la forme de séries de Laurent (4) dépendant de $n-1$ paramètres libres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$. En substituant ces développements dans le système (9), on voit (d'après le théorème de la section 2) que les coefficients $c^{(0)}, c^{(1)}, ...,$ satisfont aux équations (5) et (6). L'étape suivante consiste à considérer la fermeture $\mathcal{D}$ des composantes continues de l'ensemble des séries de Laurent de $w(z)$ tels que : $H_1(w) = a_1, \ldots, H_{m+k}(w) = a_{m+k}$. Plus précisément,

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{m+k} \left\{\text{coefficient de } z^0 \text{ dans } H_i(w(z)) = a_i\right\}.$$

C'est une sous-variété (un diviseur) de codimension 1. Ensuite on procède à la compactification de la fibre M (11) en une variété abélienne $\widetilde{M}$. Cette compactification s'obtient par l'adjonction à M de ce diviseur $\mathcal{D}$.

A titre d'exemple, considérons les équations d'Euler du mouvement de rotation d'un solide autour d'un point fixe, pris comme origine du repère lié au solide, lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée au système. Ces équations s'écrivent sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dm_1}{dt} = (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3, \\ \frac{dm_2}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3, \\ \frac{dm_3}{dt} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1 m_2. \end{array}\right. \tag{12}$$

où (m_1, m_2, m_3) est le moment angulaire du solide, I_1, I_2 et I_3, les moments d'inertie et $\lambda_i \equiv I_i^{-1}$. Ces équations forment un champ de vecteurs hamiltonien

$$\frac{dw}{dt} = J\frac{\partial H}{\partial w},\ w = (m_1, m_2, m_3)^{\mathsf{T}},$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2\right),$$

l'hamiltonien et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

Ces équations admettent deux intégrales premières quadratiques : $H_1 = H$ et

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right).$$

Ces intégrales sont fonctionnellement indépendantes, en involution et le système en question est complètement intégrable.

La résolution explicite des équations d'Euler est délicate dans le cas général où λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents; les solutions s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques. Dans la suite de ce travail nous supposerons que λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents et nous écartons les autres cas triviaux qui ne posent aucune difficulté pour la résolution des équations en question. Pour fixer les idées nous supposerons dans la suite que : $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Géométriquement, les équations

$$\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2 = 2H_1, \tag{13}$$

et

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 2H_2 \equiv r^2, \tag{14}$$

représentent respectivement les équations de la surface d'un ellipsoide et d'une sphère de rayon r. Donc le mouvement de (m_1, m_2, m_3) s'effectue sur l'intersection M d'un ellipsoide avec une sphère. Cette intersection a un sens car en comparant (13) à (14), on voit que $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$.

PROPOSITION 2. Les équations différentielles d'Euler, s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques.

Démonstration : A partir des intégrales premières (13) et (14), on exprime m_1 et m_3 en fonction de m_2. On introduit ensuite ces expressions dans la seconde équation du système (12) pour obtenir une équation différentielle en m_2 et $\frac{dm_2}{dt}$ seulement. De manière plus détaillée, on tire aisément de (13) et (14) les relations suivantes

$$m_1^2 = \frac{2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)\,m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}, \tag{15}$$

$$m_3^2 = \frac{r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)\,m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}. \tag{16}$$

En substituant ces expressions dans la seconde équation du système (12), on obtient

$$\frac{dm_2}{dt} = \sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)\,m_2^2)(r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)\,m_2^2)}.$$

En intégrant cette équation, on obtient une fonction $t(m_2)$ sous forme d'une intégrale elliptique. Pour réduire celle-ci à la forme standard, on peut supposer que $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ (sinon, il suffit d'intervertir les indices 1 et 3 dans toutes les formules précédentes). On réecrit l'équation précédente, sous la forme

$$\frac{dm_2}{\sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}dt} = \sqrt{(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}m_2^2)(1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{r^2\lambda_1 - 2H_1}m_2^2)}.$$

En posant

$$\tau = t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}, \qquad s = m_2\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}},$$

on obtient

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}s^2)},$$

ce qui suggère de choisir comme module des fonctions elliptiques

$$k^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}.$$

Les inégalités $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$ et $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ montrent qu'effectivement $0 < k^2 < 1$. On obtient donc

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}.$$

Cette équation admet la solution*

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}.$$

*on convient de choisir l'origine des temps telle que $m_2 = 0$ pour $t = 0$.

C'est l'intégrale d'une différentielle holomorphe sur une courbe elliptique

$$\mathcal{E} : y^2 = (1-s^2)(1-k^2s^2).$$

La fonction inverse $s(\tau)$ constitue l'une des fonctions elliptiques de Jacobi : $s = \mathbf{sn}\tau$, qui détermine également m_2 en fonction du temps, i.e.,

$$m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} \cdot \mathbf{sn}\tau.$$

D'après les égalités (15) et (16), on sait que les fonctions m_1 et m_3 s'expriment algébriquement à l'aide de m_2, donc

$$m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2\tau},$$

et

$$m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2\tau}.$$

Compte tenu de la définition des deux autres fonctions elliptiques

$$\mathbf{cn}\tau = \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2\tau}, \qquad \mathbf{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2\tau},$$

et du fait que $\tau = t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}$, on obtient finalement les formules suivantes :

$$(17) \qquad \begin{cases} m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} & \mathbf{cn}(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}), \\ m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} & \mathbf{sn}(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}), \\ m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}} & \mathbf{dn}(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}). \end{cases}$$

Autrement dit, l'intégration des équations d'Euler s'effectue au moyen de fonctions elliptiques, ce qui achève la démonstration de la proposition.□

Les deux cercles définies par l'intersection M, forme la partie réelle d'un tore complexe de dimension 1, définie par la courbe elliptique $\mathcal{E}$. L'intersection complexe $\left(\subset \mathbb{C}^3\right)$ est la partie affine d'une courbe elliptique $\overline{M} \in \mathbb{CP}^3$. On montre que $\overline{M}$ est isomorphe à la courbe elliptique $\mathcal{E}$. En outre l'intersection réelle $\left(\subset \mathbb{R}^3\right)$ s'étend au tore complexe $\mathbb{C}/$*réseau* et le flot se linéarise sur ce tore. Si

$$p(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t)),$$

est une solution de (12), la loi reliant $p(t_1 + t_2)$ à $p(t_1)$ et $p(t_2)$ est la loi d'addition sur la courbe elliptique. D'après les équations (12), l'unique différentielle holomorphe sur $\overline{M}$ est donnée par

$$\omega = \frac{dm_1}{(\lambda_3 - \lambda_2)m_2m_3} = \frac{dm_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)m_1m_3} = \frac{dm_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)m_1m_2},$$

d'où

$$t=\int_{p(0)}^{p(t)}\omega,\qquad p(0)\in\overline{M}.$$

Le système (12) est invariant par les transformations

$$t\to\alpha^{-1}t,\ m_1\to\alpha m_1,\ m_2\to\alpha m_2,\ m_3\to\alpha m_3.$$

Celles-ci sont uniques puisque le determinant (3) est égal à

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} -(\lambda_3-\lambda_2)m_2m_3 & (\lambda_3-\lambda_2)m_2m_3 & (\lambda_3-\lambda_2)m_2m_3\\ (\lambda_1-\lambda_3)m_1m_3 & -(\lambda_1-\lambda_3)m_1m_3 & (\lambda_1-\lambda_3)m_1m_3\\ (\lambda_2-\lambda_1)m_1m_2 & (\lambda_2-\lambda_1)m_1m_2 & -(\lambda_2-\lambda_1)m_1m_2\end{vmatrix},\\ &= 4(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)m_1^2m_2^2m_3^2,\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

On peut donc chercher des solutions du système (12) sous la forme de séries de Laurent

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{1}{t}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots\right),\\ m_2 &= \frac{1}{t}\left(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots\right),\\ m_3 &= \frac{1}{t}\left(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots\right),\end{aligned}$$

dépendant de $\dim(\text{espace de phase})-1=2$ paramètres libres. En substituant ces équations dans le système (12), on voit que :

1) les coefficients a_0,b_0,c_0, satisfont aux équations

$$\begin{aligned}a_0+(\lambda_3-\lambda_2)b_0c_0 &= 0,\\ b_0+(\lambda_1-\lambda_3)a_0c_0 &= 0,\\ c_0+(\lambda_2-\lambda_1)a_0b_0 &= 0,\end{aligned}$$

dont les solutions sont

<u>1^er cas</u> : $a_0=\frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}}$, $b_0=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}$, $c_0=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}$.

<u>2^ème cas</u> : $a_0=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}}$, $b_0=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}$, $c_0=\frac{-1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}$.

<u>3^ème cas</u> : $a_0=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}}$, $b_0=\frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}$, $c_0=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}$.

<u>4^ème cas</u> : $a_0=\frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}}$, $b_0=\frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}$, $c_0=\frac{-1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}$.

2) les coefficients a_1,b_1,c_1, satisfont aux équations

$$\begin{aligned}(\lambda_3-\lambda_2)b_0c_1+(\lambda_3-\lambda_2)b_1c_0 &= 0,\\ (\lambda_1-\lambda_3)a_0c_1+(\lambda_1-\lambda_3)a_1c_0 &= 0,\\ (\lambda_2-\lambda_1)a_0b_1+(\lambda_2-\lambda_1)a_1b_0 &= 0,\end{aligned}$$

dont les solutions sont dant tous les cas : $a_1 = b_1 = c_1 = 0$.

3) les coefficients a_2, b_2, c_2, satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
a_2 - \lambda_3 b_0 c_2 - \lambda_3 b_1 c_1 - \lambda_3 b_2 c_0 + \lambda_2 b_0 c_2 + \lambda_2 b_1 c_1 + \lambda_2 b_2 c_0 = 0,\\
b_2 - \lambda_1 a_0 c_2 - \lambda_1 a_1 c_1 - \lambda_1 a_2 c_0 + \lambda_3 a_0 c_2 + \lambda_3 a_1 c_1 + \lambda_3 a_2 c_0 = 0,\\
c_2 - \lambda_2 a_0 b_2 - \lambda_2 a_1 b_1 - \lambda_2 a_2 b_0 + \lambda_1 a_0 b_2 + \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_1 a_2 b_0 = 0,
\end{aligned}$$

dont les solutions qui correspondent aux différents cas sont respectivement :
1er cas : $a_2 = \frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)}} b_2 + \frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)}} c_2$.
2ème cas : $a_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}} b_2 + \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}} c_2$.
3ème cas : $a_2 = \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}} b_2 - \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}} c_2$.
4ème cas : $a_2 = -\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}} b_2 - \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}} c_2$.
où b_2 et c_2 sont deux paramètres libres.
Par conséquent, pour le premier cas on a

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{-1}{t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}} + \left(\frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)}} b_2 + \frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)}} c_2\right) t + \cdots,\\
m_2 &= \frac{1}{t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}} + b_2 t + \cdots,\\
m_3 &= \frac{1}{t\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}} + c_2 t + \cdots.
\end{aligned}$$

En substituant ces développements dans les intégrales premières H_1 (13) et H_2(14), on obtient

$$\begin{aligned}
H_1 = 2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}\right) b_2 + 2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) c_2,\\
H_2 = 2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_3}\right) b_2 + 2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) c_2,
\end{aligned}$$

et on en déduit les relations

$$\begin{aligned}
c_2 = \frac{1}{6\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}\left((\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1 H_1 - H_2) - (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2 H_1 - H_2)\right),\\
b_2 = \frac{1}{6\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}\left((\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3 H_1 - H_2) - (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1 H_1 - H_2)\right).
\end{aligned}$$

On obtient évidemment des expressions similaires pour les autres cas. Il serait intéressant de comparer les solutions obtenues sous forme de séries de Laurent avec les solutions obtenues précédemment à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi.

Remerciements. Je remercie le referee pour ses remarques et suggestions très utiles.

Références

[1] ADLER M. AND VAN MOERBEKE P., *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis*, Invent. Math. **97** (1989), 3–51.

[2] ARNOLD V.I., *Ordinary differential equations*, Springer-Textbook, 2nd edition, 1992.

[3] CARTAN H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961.

[4] FRANCOISE J.P., *Integrability of quasi-homogeneous vector fields*, (preprint).

[5] GRIFFITHS P.A. AND HARRIS, J., *Principles of algebraic geometry*", Wiley-Interscience, New York, 1978.

[6] HAINE L., *Geodesic flow on* $SO(4)$ *and Abelian surfaces*, Math. Ann. **263** (1983), 435–472.

[7] HILLE E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley-Interscience, New-York 1976.

[8] LESFARI A., *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. École Norm. Sup., Paris, sér. 4 **21** (1988), 193–223.

[9] LESFARI A., *Completely integrable systems :Jacobi's heritage*, J. Geom. Phys **31** (1999), 265–286.

[10] LESFARI A., *Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences*, Elem. Math. (Issue 1) **58** (2003), 6–20.

[11] LESFARI A., *Analyse des singularités de quelques systèmes intégrables*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. **I** **341** (2005), 85–88.

[12] PAINLEVE P., *Oeuvres : tomes 1,2,3*, Edition du C.N.R.S. 1975.

AMS Subject Classification : 34M05, 34M45, 70H06.

A. LESFARI, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali, B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E-mail address : `Lesfariahmed@yahoo.fr`

Lavoro pervenuto in redazione il 08.05.2006 e, in forma definitiva, il 29.01.2007.