

L. M. Ricciardi

INCERTEZZA E FUNZIONALITÀ: INCONCILIABILE BINOMIO IN SINERGIE MULTIDISCIPLINARI?

Sommario. Si svolgono considerazioni su vari tipi di incertezza, anche di natura non probabilistica, derivanti da eccessive complessità strutturali, analitiche o computazionali, da alternative modalità di rappresentazione, da evoluzione di sistemi dinamici a comportamento pseudocasuale e da strutture soggette a perturbazioni generate dall'ambiente nel quale esse operano. Ricorrendo a specifica esemplificazione, si sottolinea come anche da premesse di natura strettamente probabilistica possano conseguire previsioni estremamente attendibili, e come della aleatorietà intrinseca insita in talune procedure possa discendere pratica certezza di conclusioni. In particolare ci si sofferma su esempi di forme di incertezza derivanti dal funzionamento di motori biologici responsabili del fenomeno della contrazione muscolare. Questa viene riguardata nei suoi processi più intimi, a livello monomolecolare, proprio laddove la presenza dell'agitazione termica caratteristica del mezzo nel quale essi operano dovrebbe risultare altamente ostativa al loro corretto funzionamento. Si mostra invece come la presenza degli esistenti, intrinseci elementi di casualità possa al contrario essere utilizzata proficuamente da detti motori, ad ulteriore sostegno della tesi che incertezza e funzionalità non vanno necessariamente riguardate come caratteristiche contrastanti, soprattutto in sistemi la descrizione della cui dinamica richiede competenze e sinergie multidisciplinari.

1. Introduzione

Nel lontano 1970 un giovane docente dell'Università di Chicago, pressoché sconosciuto alla comunità matematica italiana, alle prese con un tentativo di inversione di una trasformata di Laplace richiesta per la risoluzione di un problema di interesse biologico, con la temerarietà e la semplicità alle quali era divenuto aduso negli ambienti accademici del Nuovo Mondo, si rivolgeva epistolamente al Prof. Francesco G. Tricomi chiedendogli una consulenza sul problema con il quale era alle prese. A ciò era stato indotto dalla consapevolezza che, al di là della sua notorietà internazionale, molto viva anche oltre Oceano, il professor Tricomi possedeva senza dubbio profonda esperienza nel contesto delle trasformazioni funzionali e delle cosiddette funzioni speciali, come tra l'altro attestato dalla sua partecipazione alla pubblicazione di quell'opera titanica nota come *Bateman Manuscript Project* del California Institute of Technology [15].* Piuttosto dubbioso che alla richiesta avrebbe fatto seguito un cenno di riscontro, grande fu la sua meraviglia nel ricevere a breve una missiva da parte del Prof. Tricomi da lui stesso apparentemente composta con l'ormai desueto sistema "pennacalamai" (v. Fig 1). Al di là della prognosi negativa sulla fattibilità della ricercata inversione, veniva ivi fatto riferimento al suo volume *Funzioni ipergeometriche con-*

*È doveroso qui ricordare come le funzioni speciali e gli algoritmi numerici abbiano sempre costituito aree di grande attenzione nell'Università di Torino ad opera del Gruppo di Analisi Numerica fondato dal compianto Prof. Luigi Gatteschi e dal Prof. Francesco Lerda, ad entrambi i quali molto è dovuto da chi qui scrive.

fluenti [22] che da quell'epoca ha costituito prezioso strumento anche per un ampio gruppo di collaboratori del destinatario della missiva.

Anche con riferimento all'aspetto tecnico della consulenza richiesta al Prof. Tricomi, mi propongo di effettuare in quanto segue un rapido excursus attraverso alcuni problemi di particolare attualità con la finalità di sottolineare come incertezza e funzionalità caratterizzanti sistemi biologici sia a livello macroscopico che in scala monomolecolare non costituiscono necessariamente elementi inconciliabili, ma che in taluni casi l'incertezza tipica caratterizzante fenomeni del regno dell'ultramicroscopico può riguardarsi come elemento utile ai fini della funzionalità stessa del sistema in considerazione.

Parafrasando una frase contenuta nella prefazione di uno dei volumi a carattere espositivo del Prof. Tricomi, tenterò nel presente scritto di rendere quanto più possibile semplice l'esposizione di alcune questioni invero piuttosto riposte, ma comunque con il fermo intento di non rendere complicate quelle che invece sono semplici.

Sarà tuttavia utile iniziare con una rapida rassegna di alcune situazioni nelle quali i concetti di incertezza, probabilità e funzionalità si prestano ad alcune interessanti conclusioni.

2. Incertezza per complessità

Allorché ci si appresta a guardare all'Universo del quale siamo parte con la finalità di costruire modelli o teorie di fenomeni di varia natura, ci si imbatte in una sorta di incertezza di base legata all'enorme variabilità dei parametri coinvolti. Con riferimento, ad esempio, alle più familiari unità di misura, ci si confronta con lunghezze che, espresse in metri variano ad esempio da qualcosa come $2 \cdot 10^{22}$ (distanza di Andromeda, la nebulosa a noi più vicina) ad $1,2 \cdot 10^{-15}$, lunghezza del raggio efficace del protone. Così, con riferimento alle masse (espresse in chilogrammi), è noto che esse spaziano, ad esempio, da $2,2 \cdot 10^{41}$ (massa della nostra galassia) a $9,1 \cdot 10^{-31}$ (massa dell'elettrone). Che dire dei tempi? Con riferimento a misure espresse in secondi, andiamo dall'età dell'universo ($1 \cdot 10^{18}$) a $4 \cdot 10^{-21}$ (periodo di oscillazione di un raggio gamma).

Gli esempi menzionati ci indicano con chiarezza che estremamente limitati sono gli intervalli per i quali riusciamo a concepire, sulla base delle esperienze vissute, una qualche intuizione, come invece avviene ad esempio per lunghezze in intervalli da 10^6 a 10^{-4} metri (rispettivamente ordine di grandezze del raggio terrestre e dello spessore di un lucido per lavagna luminosa), o per masse variabili da 10^8 a 10^{-10} chilogrammi (rispettivamente masse di un transatlantico e di un granello di polvere), o tempi quali da 2 miliardi a 0,8 secondi rappresentanti, rispettivamente la vita media di un uomo ed il periodo standard del battito cardiaco. Al di fuori di queste situazioni a noi ben familiari e di semplice intuizione ci si perde nella più assoluta incertezza allorché si tenta di metabolizzare, nel senso di comprenderne appieno l'entità, distanze, masse e tempi quali quelli inizialmente menzionati. Ma ancora più sorprendente, e qui lo stupore non cessa mai di colpire chi scrive, quando si vuol tentare di tradurre in istanze percepibili numeri quali quelli forniti dal familiarissimo $n!$. Mentre, ad esempio, con un pò di sforzo si riesce forse ad intuire la grandezza della prima quindicina di fattoriali

UNIVERSITÀ DI TORINO
BIBLIOTECA MATEMATICA
VIA CARLO ALBERTO, 10

Corinto, 21 nov. 1970

Al Prof. Luigi M. Ricciardi

Chicago

Caro Prof. Ricciardi,

di ritorno da un viaggio, trovo qui la Sua del 10 corrente.

L'invenzione della trasformazione di Laplace:

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

è una delle maggiori difficoltà nell'impiego di questo potente strumento di calcolo. All'uso si ha un integrale complesso:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s) ds,$$

ove l'integrazione è da estendersi ad una parallela all'asse immaginario contenuta nel semipiano di convergenza della trasformata, ma sono rari i casi in cui questo integrale è di qualche utilità.

Di solito si cerca di ridurre la data trasformata ad una di quelle elencate nelle numerose tabelle esistenti, quali quelle del Bateman Project.

Nel Suo caso la prognosi è piuttosto infavola e, in specie, io non mi ricordo di aver mai visto della trasformata di Laplace in cui la variabile fosse nell'indice di una f_{2n} del cilindro parabolico D_n .

Quanto a conoscere l'andamento della Sua $L\{g\}$, cioè della f_{2n} che mi trascrive, ciò è cosa abbastanza facile avendo qualche conoscenza delle f_{2n} del cilindro parabolico di cui, fra l'altro, si tratta nelle mie "Fugioni Geometriche Confluenti". (Roma, Cremonese, 1954)

Dolente di non poterle dare un aiuto più concreto, ha saluto cordialmente

Suo Tricomi

Prof. Dr. Ing. h. c. Comm.
FRANCESCO GIACOMO TRICOMI
ACCADEMICO LINCEO
C.so Tassoni 34 - 10143 TORINO

Figura 1: Lettera manoscritta del Prof. Tricomi in risposta ad un quesito rivolto gli dall'autore.

(ad esempio $15!$ è uguale a untrilionetrecentosette miliardi seicentosettantaquattromilionitrecentosessantottomila), già con $20!$ siamo al di fuori del range della nostra comprensione o benché minima intuizione (ad esempio $20! = 2,43902008176640 \cdot 10^{18}$ o, ancora, $100! = 9,332621544394454 \dots \cdot 10^{157}$). Ci tocca destreggiarci, dunque, tra quantità che, ancorché perfettamente rappresentate numericamente, sono al di fuori di qualsiasi umana reale percezione. Si tratta, dunque, di incertezze per nulla legate a fenomeni aleatori, ma pur tuttavia presentanti un “grado di aleatorietà” elevato, dovuto alla nostra incapacità di porre in relazione dette grandezze con quelle caratteristiche della nostra esperienza quotidiana.

2.1. Processo di Ornstein-Uhlenbeck

Passando a qualche considerazione di natura più tecnica, esporrò ora brevemente alcune considerazioni che sottolineano come alla assoluta precisione matematica ed eleganza formale vada talora associata altrettanto assoluta incertezza. A titolo esemplificativo, farò inizialmente riferimento al cosiddetto processo di Ornstein-Uhlenbeck, che a lungo ha richiesto molti sforzi ed attenzione, anche da parte dello scrivente e di vari suoi collaboratori, in relazione ad alcuni collegati problemi.

Come è ben noto, nel 1827 Robert Brown pubblicava una memoria nelle *Philosophical Transactions* ([2]) annunciante l’esistenza di una particolare forma di moto da parte di particelle non elettrolitiche in sospensione acquosa esibente caratteristiche del tutto inusuali, non dipendenti dalla natura di queste, ma soltanto dalle loro dimensioni. (Il frontespizio della storica pubblicazione è riprodotto in Fig. 2, mentre nella Fig. 3 vengono mostrate alcune registrazioni di traiettorie di particelle in moto browniano).

Si doveva tuttavia attendere l’*annus mirabilis 1905*[†] per una spiegazione quantitativa, ad opera di Einstein, dell’origine e delle caratteristiche del suddetto moto, poi denominato “moto browniano” in onore del suo scopritore. Successivamente, la necessità di raffinare il modello di Einstein impegnò numerosi matematici e fisici, tra i quali J.L. Doob, M. Kac, Min Chen Wang e, in particolare, G.E. Ornstein ed L.S. Uhlenbeck. Questi ultimi elaborarono un modello matematico nel quale le particelle in moto browniano venivano visualizzate come soggette ad un processo stocastico di diffusione nel quale la densità $U(x, t)$ di particelle in ogni punto x e ad ogni istante t , nella proiezione unidimensionale, veniva vista come obbediente all’equazione:

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \left(-\frac{x}{\theta} + \mu\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con θ , μ e σ opportuni parametri. La semplicità dell’equazione nasconde tuttavia insospettite difficoltà allorché in luogo di ricercare la soluzione interpretabile appunto come densità di particelle, si voglia affrontare qualche problema leggermente diverso, ma comunque collegato. Ci si chiede, ad esempio, quando per la prima volta, partendo da

[†]In tale anno Albert Einstein (14 Marzo 1879–18 Aprile 1955) fu autore di quattro articoli che lo resero immortale: oltre quello sull’effetto fotoelettrico (che gli valse il premio Nobel nel 1921, nel quale avanzò l’ipotesi dell’esistenza del fotone) ed i due articoli sulla relatività ristretta, egli pubblicò il primo lavoro sulla descrizione cinetico-molecolare del moto browniano.

THE
PHILOSOPHICAL MAGAZINE
AND
ANNALS OF PHILOSOPHY.

[NEW SERIES.]

SEPTEMBER 1828.

XXVII. *A brief Account of Microscopical Observations made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies.*
By ROBERT BROWN, F.R.S., Hon. M.R.S.E. & R.I. Acad., V.P.L.S., Corresponding Member of the Royal Institutes of France and of the Netherlands, &c. &c.

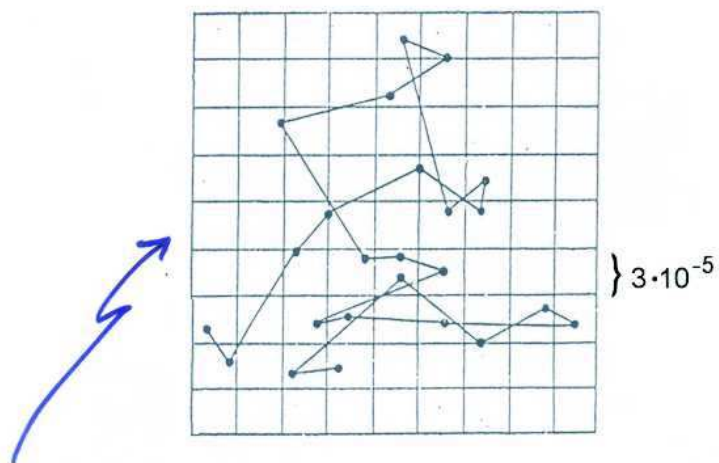
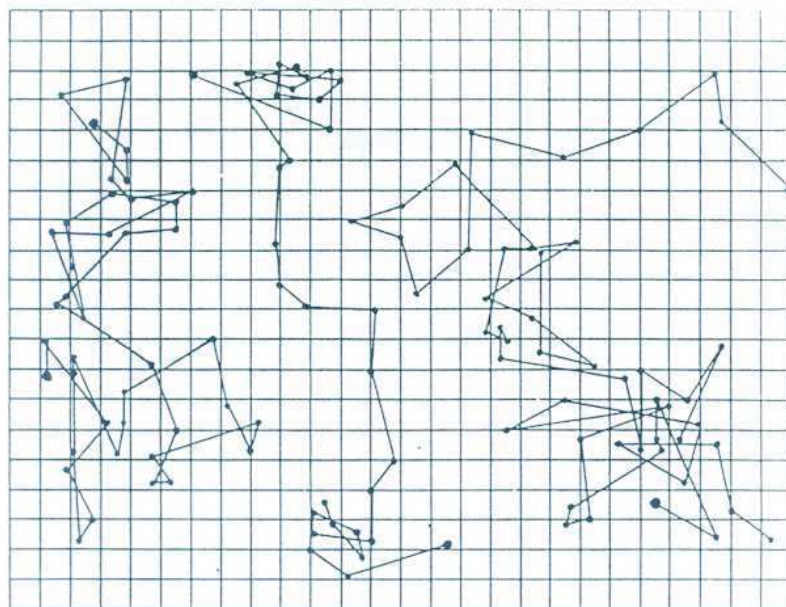
[We have been favoured by the Author with permission to insert the following paper, which has just been printed for private distribution.—ED.]

THE observations, of which it is my object to give a summary in the following pages, have all been made with a simple microscope, and indeed with one and the same lens, the focal length of which is about $\frac{1}{32}$ nd of an inch*.

The examination of the unimpregnated vegetable Ovulum, an account of which was published early in 1826†, led me to attend more minutely than I had before done to the structure of the Pollen, and to inquire into its mode of action on the Pistillum in Phænogamous plants.

In the Essay referred-to, it was shown that the apex of the

* This double convex Lens, which has been several years in my possession, I obtained from Mr. Bancks, optician, in the Strand. After I had made considerable progress in the inquiry, I explained the nature of my subject to Mr. Dollond, who obligingly made for me a simple pocket microscope, having very delicate adjustment, and furnished with excellent lenses, two of which are of much higher power than that above mentioned. To these I have often had recourse, and with great advantage, in investigating several minute points. But to give greater consistency to my statements, and to bring the subject as much as possible within the reach of general observation, I continued to employ throughout the whole of the inquiry the same lens with which it was commenced.



osservazioni ogni 30 secondi
granulo di mastice (resina del lentischio), $r = 5,3 \cdot 10^{-3}$

Figura 3: Alcune traiettorie di particelle in moto browniano.

una preassegnata posizione y , una generica particella raggiunge una specificata “soglia” S . Ad onta della semplicità della domanda, la risposta in termini quantitativi risulta molto complicata. Sia invero $X(t)$ il processo stocastico di Ornstein-Uhlenbeck (come si è detto, riguardato in una sola dimensione) rappresentante il processo caratterizzato da densità di transizione

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x, t|y, \tau) &:= \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) \leq x | X(\tau) \leq y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t|\tau)}} \exp\left\{-\frac{[x - M(t|y, \tau)]^2}{2V(t|\tau)}\right\}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} M(t|y, \tau) &= ye^{-(t-\tau)/\vartheta} + \mu\theta(1 - e^{-(t-\tau)/\vartheta}) \\ V(t|\tau) &= \frac{\sigma^2\vartheta}{2}(1 - e^{-2(t-\tau)/\vartheta}). \end{aligned}$$

Detta $S(t)$ una funzione continua dotata di derivata continua, si ponga

$$(3) \quad g[S(t), t|y, \tau] := \frac{\partial}{\partial t} P(T < t),$$

dove

$$(4) \quad T = \inf_{t \geq 0} \{t : X(t) > S(t)\}, \quad P\{X(0) = x_0 < S(0)\} = 1.$$

La (4) definisce la variabile casuale “tempo di primo passaggio” di $X(t)$ attraverso $S(t)$ con la condizione che all’istante iniziale $t = 0$ le realizzazioni del processo considerate hanno origine in x_0 , eccezion fatta al più per un insieme di misura nulla. La (3) denota la densità di probabilità di T . In virtù della continuità delle realizzazioni del processo, che d’ora innanzi supporremo markoviano, è possibile dimostrare che in generale sussiste la seguente equazione integrale

$$(5) \quad f(x, t|y, \tau) = \int_{\tau}^t g[S(\vartheta), \vartheta|y, \tau] f[x, t|S(\vartheta), \vartheta] d\vartheta$$

per $x \geq S(t), y < S(\tau)$.

nell’incognita funzione g quando si assuma nota la densità di transizione f del processo. Con l’eccezione di alcuni casi non particolarmente interessanti, non è conosciuta la soluzione in forma chiusa di tale equazione nemmeno nel caso dei più semplici processi quando $S(t)$ sia di forma abbastanza generale. In particolare, nel caso di costante $S(t) = S$, è infatti possibile dimostrare che la trasformata di Laplace di $g(S, t|y)$ ha l’espressione:

$$(6) \quad g_{\lambda}(S|y) = \exp\left[\frac{(y - \mu\vartheta)^2 - (S - \mu\vartheta)^2}{2\sigma^2\vartheta}\right] \frac{D_{-\lambda\vartheta}\left[\sqrt{\frac{2}{\sigma^2\vartheta}}(\mu\vartheta - y)\right]}{D_{-\lambda\vartheta}\left[\sqrt{\frac{2}{\sigma^2\vartheta}}(\mu\vartheta - S)\right]},$$

nella quale $D_\nu(\cdot)$ è la funzione del cilindro parabolico:

$$D_\nu(z) = \sqrt{\pi} 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \left[\frac{1}{\Gamma[(1-\nu)/2]} \Phi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(-\nu/2)} z \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right],$$

dove

$$\Phi(a, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{c(c+1) \cdots (c+n-1)} \frac{x^n}{n!},$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

denotano, rispettivamente, la funzione di Kummer e la gamma euleriana. Si tratta dunque di un problema formalmente risolto quando si ottenga la funzione $g(S, t|y)$ mediante inversione della trasformata di Laplace di cui sopra. Ma accade che ciò non sia fattibile. L'apparente semplicità della formula (1) in realtà è assolutamente avara di informazioni nel senso che, pur essendo essa rigorosamente esatta, non fornisce di per sé informazioni di sorta che aiutino a comprendere le proprietà della funzione $g(S, t|y)$ richiesta.[‡] Ma qui il Matematico non demorde, ed osserva che qualche progresso pur tuttavia può essere compiuto utilizzando la (6) per cercare di ottenere informazioni se non proprio sulla densità del tempo di primo passaggio, almeno sulle sue proprietà statistiche, quali tempo medio, varianza, asimmetria, ecc. Con una procedura ben nota, partendo dalla (6) si riesce invero a ricavare i momenti intorno all'origine del tempo di primo passaggio. Ad esempio, per i primi tre momenti, con una massiccia mole di calcoli originariamente sviluppati nel 1976 da Laura Sacerdote con l'energia di una molto motivata e giovanissima tesista, si ottiene:

$$(7) \quad t_1(S|y) = \vartheta \left\{ \sqrt{\pi} \left[\varphi_1\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi_1\left(\frac{y-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) \right] + \psi_1\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) - \psi_1\left(\frac{y-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) \right\}$$

$$(8) \quad t_2(S|y) = 2 \vartheta t_1(S|y) \left[\sqrt{\pi} \varphi_1\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) + \psi_1\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) \right] + 2 \vartheta^2 \left\{ \sqrt{\pi} \ln 2 \left[\varphi_1\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi_1\left(\frac{y-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) \right] - \sqrt{\pi} \left[\varphi_2\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi_2\left(\frac{y-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) \right] - \psi_2\left(\frac{S-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) + \psi_2\left(\frac{y-\mu\vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\right) \right\}$$

[‡]Proprio al problema dell'inversione della trasformata (6) si faceva riferimento nel quesito di cui si è detto posto al Prof. Tricomi e nella conseguente sua risposta.

$$\begin{aligned}
 (9) \quad t_3(S|y) = & 3 \vartheta t_2(S|y) \left[\sqrt{\pi} \varphi_1 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) + \psi_1 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) \right] \\
 & + 6 \vartheta^2 t_1(S|y) \left[\sqrt{\pi} \ln 2 \varphi_1 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) - \sqrt{\pi} \varphi_2 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) - \psi_2 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) \right] \\
 & + 3 \vartheta^3 \sqrt{\pi} \left(\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{12} \right) \left[\varphi_1 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) - \varphi_1 \left(\frac{y - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) \right] \\
 & - 6 \vartheta^3 \sqrt{\pi} \ln 2 \left[\varphi_2 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) - \varphi_2 \left(\frac{y - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) \right] \\
 & + 6 \vartheta^3 \sqrt{\pi} \left[\varphi_3 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) - \varphi_3 \left(\frac{y - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) \right] \\
 & + 6 \vartheta^3 \left[\psi_3 \left(\frac{S - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) - \psi_3 \left(\frac{y - \mu \vartheta}{\sigma \sqrt{\vartheta}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(z) &= \int_0^z e^{t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)k!} \\
 \varphi_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \\
 \varphi_3(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+5}}{(n+2)!(2n+5)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+3} \sum_{j=0}^k \frac{1}{2j+1}
 \end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
 \psi_1(z) &= 2 \int_0^z du e^{u^2} \int_0^u dv e^{-v^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)(2n+1)!!} z^{2n+2} \\
 \psi_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+4}}{(2n+3)!!(n+2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \\
 \psi_3(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+6}}{(2n+5)!!(n+3)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j+1}.
 \end{aligned}$$

La (7) fornisce il valor medio del ricercato tempo di primo passaggio, dalle (7) e (8) si ottiene la varianza $\text{Var}(S|t) = t_2 - t_1^2$ ed, infine, la (9) consente di calcolare il coefficiente di asimmetria $\Sigma(S|y) = t_3(S|y) / [\text{Var}(S|y)^{3/2}]$.

Si tratta ancora una volta di espressioni esatte dalle cui ispezioni, tuttavia, non si traggono informazioni in qualche modo interpretabili e significative. Siamo ancora di fronte ad un evidente caso di “incertezza per complessità”.

2.2. Dall'incertezza all'informazione

Come in altre frequenti situazioni, l'incertezza della quale si è appena detto può tuttavia trasformarsi in indicazioni di grande interesse ed utilità, come ci accingiamo qui ad

Tabella 1: Momenti del tempo di primo passaggio.

	S	$t_1(S y)$	$Var(S y)$	$t_1^2(S y)$	$\Sigma(S y)$
$y = 3$	4	$0.193146E+04$	$0.406163E+07$	$0.373054E+07$	2.00533
	5	$0.140654E+06$	$0.198076E+11$	$0.197836E+11$	2.00000
	6	$0.282674E+08$	$0.799052E+15$	$0.799047E+15$	2.00000
	7	$0.159800E+11$	$0.255359E+21$	$0.255359E+21$	2.00000
$y = 0$	1	$0.209341E+01$	$0.584203E+01$	$0.438235E+01$	2.29375
	2	$0.104284E+02$	$0.105275E+03$	$0.108752E+03$	2.01050
	3	$0.869316E+02$	$0.742438E+04$	$0.755711E+04$	1.99998
	4	$0.201839E+04$	$0.406906E+07$	$0.407391E+07$	2.00000
	5	$0.140741E+06$	$0.198076E+11$	$0.198080E+11$	2.00000
	6	$0.282675E+08$	$0.799052E+15$	$0.799052E+15$	2.00000
	7	$0.159800E+11$	$0.255359E+21$	$0.255359E+21$	2.00000
$y = -2$	-1	$0.523297E+00$	$0.215861E+00$	$0.273839E+00$	2.21670
	0	$0.142520E+01$	$0.106694E+01$	$0.203121E+01$	1.84970
	1	$0.351861E+01$	$0.690897E+01$	$0.123806E+02$	1.89575
	2	$0.118536E+02$	$0.106342E+03$	$0.140508E+03$	1.98218
	3	$0.883568E+02$	$0.742545E+04$	$0.780693E+04$	1.99955
	4	$0.201982E+04$	$0.406906E+07$	$0.407966E+07$	2.00000
	5	$0.140742E+06$	$0.198076E+11$	$0.198084E+11$	2.00000
	6	$0.282675E+08$	$0.799052E+15$	$0.799052E+15$	2.00000
7	$0.159800E+11$	$0.255359E+21$	$0.255359E+21$	2.00000	

esemplificativamente mostrare. Osserviamo a tal fine la Tabella 1 nella quale, con riferimento al caso normalizzato $\mu = 0$, $\theta = 1$ e $\sigma = \sqrt{2}$, vengono riportati valore medio e varianza. Ad un'attenta osservazione si nota che all'allontanarsi del punto di partenza dal livello S , i quadrati dei valori medi si avvicinano progressivamente ai corrispondenti valori delle varianze, mentre i coefficienti di asimmetria tendono a 2. Ciò induce a sospettare che il processo esibisca una sorta di imprevisto comportamento asintotico all'aumentare indefinito della distanza tra y e S , in conseguenza del quale la incognita densità del tempo di primo passaggio da y a S diviene esponenziale. Sulla base di tale osservazione computazionalmente "sperimentale", si riesce poi a dimostrare la sussistenza di tale tendenza in maniera rigorosa attraverso una procedura di limite. Ciò, tuttavia, che detta procedura non può dischiudere è la proprietà di approssimata esponenzialità di detta densità anche per valori "piccoli" della distanza fra y ed S , che rimane un risultato di natura esclusivamente sperimentale.

Quanto descritto costituisce in sintesi un risultato di natura numerico-computazionale grazie al quale si passa da una situazione di incertezza assoluta per complessità (vedi formule precedenti) ad una caratteristica di immediata e intuitiva comprensione.

Tabella 2: Densità stimate del tempo di primo passaggio.

t	\tilde{g}	g^*
6	0.493983×10^{-3}	0.493973×10^{-3}
15	0.491770×10^{-3}	0.491776×10^{-3}
30	0.488129×10^{-3}	0.488134×10^{-3}
90	0.473834×10^{-3}	0.473837×10^{-3}
180	0.453173×10^{-3}	0.453173×10^{-3}
270	0.433413×10^{-3}	0.433410×10^{-3}
360	0.414515×10^{-3}	0.414509×10^{-3}
450	0.396440×10^{-3}	0.396432×10^{-3}

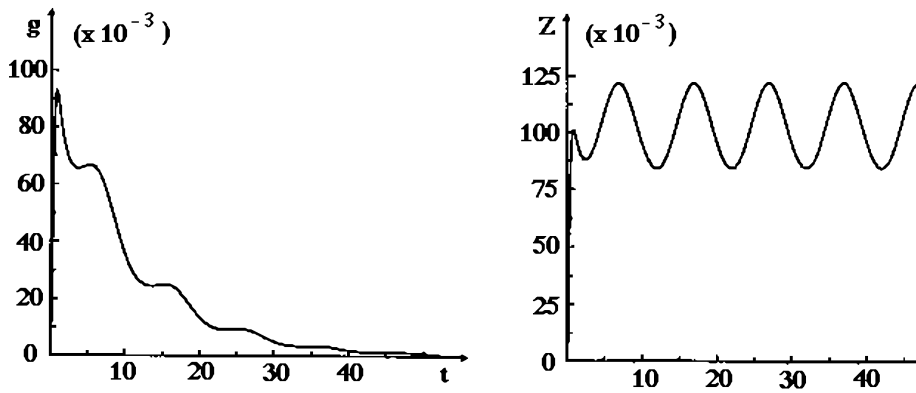


Figura 4: Processo di Ornstein-Uhlenbeck con $A_1(x) = -x$, $A_2 = 2$ con punto iniziale $y = 0$ e barriera $S(t) = A + C \sin(2\pi t/T)$. Densità del tempo di primo passaggio $g(t)$ e funzione $Z(t)$ con $A = 2$, $C = 0.1$, $T = 10$, $\gamma = 0.098032053$. (Vedi [17] e [20]).

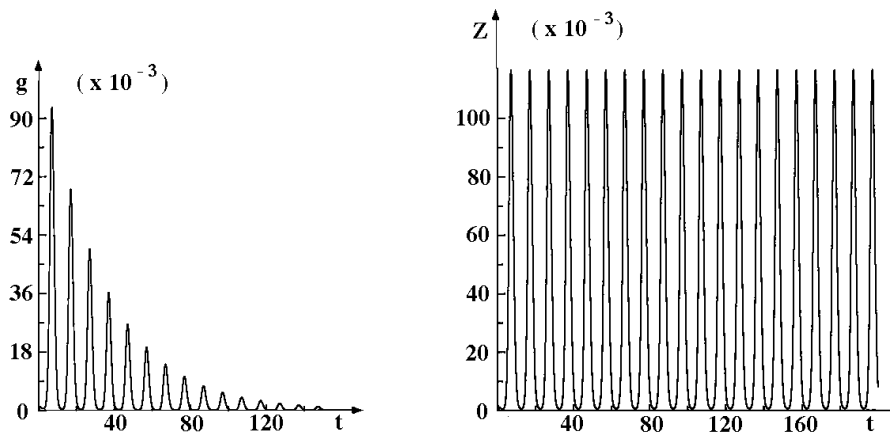


Figura 5: Come in Figura 4 con $A = 3$, $C = 1.0$, $T = 10$, $\gamma = 0.3141158571E - 1$.

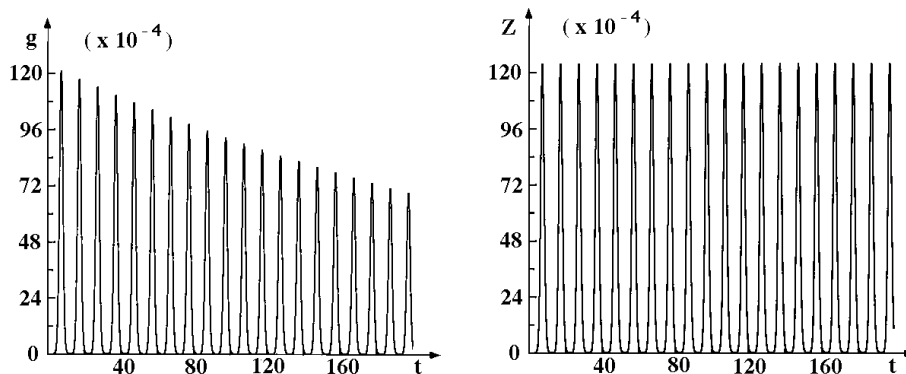


Figura 6: Come in Figura 4 con $A = 4$, $C = 1$, $T = 10$, $\gamma = 0.2964011564E - 2$.

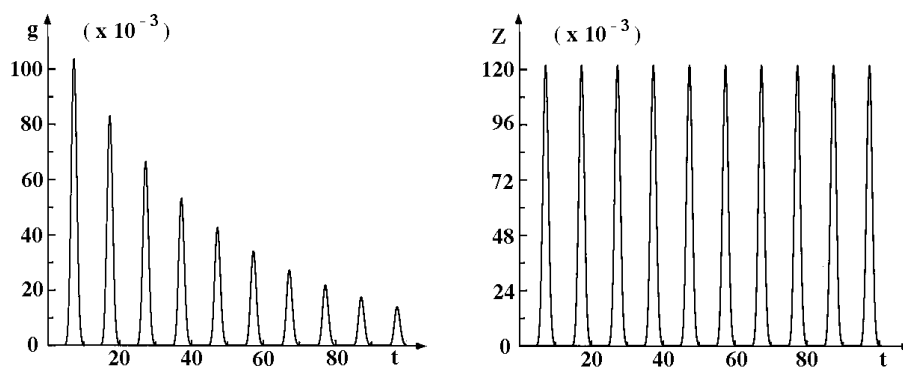


Figura 7: Come in Figura 4 con $A = 4$, $C = 2$, $T = 10$, $\gamma = 0.2221735001E - 1$.

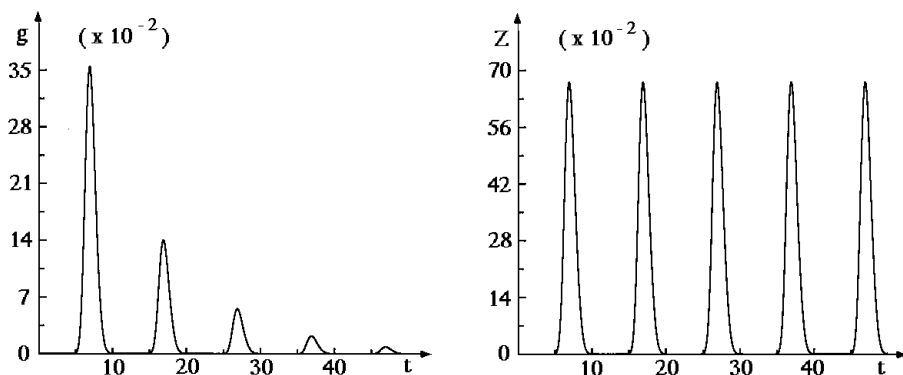


Figura 8: Come in Figura 4 con $A = 4$, $C = 3$, $T = 10$, $\gamma = 0.926166043E - 1$.

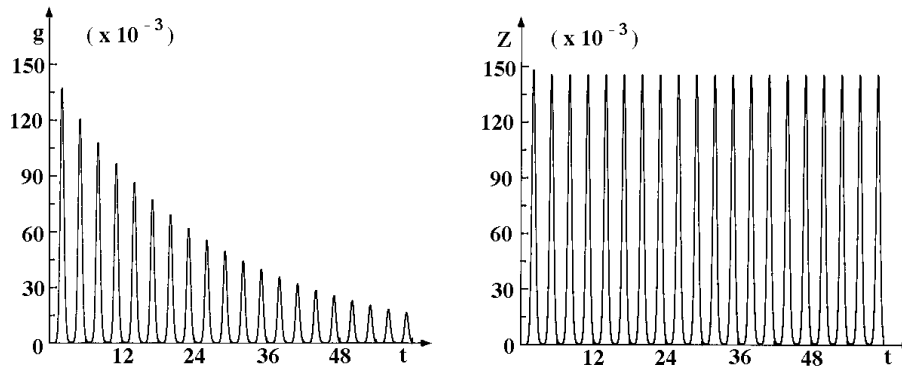


Figura 9: Come in Figure 4 con $A = 3, C = 1, T = 3, \gamma = 0.3705807738E - 1$.

La Tabella 2 sottolinea la bontà di detta approssimazione esponenziale in un esempio nel quale si è scelto $y = 0$ e $S = 4$. Ivi, per alcuni valori crescenti di t , vengono confrontati i valori di g^* ottenuti mediante l'approssimazione esponenziale

$$(10) \quad g^* = [t_1(4|0)]^{-1} \exp \left\{ - [t_1(4|0)]^{-1} t \right\}$$

con i valori di $g(4, t|0)$ ottenuti per altra via mediante valutazione numerica è evidente l'eccellente accordo.

Le considerazioni testé svolte inducono a chiedersi che tipo di comportamento debba attendersi per la densità di primo passaggio nel caso di soglie in generale non costanti. Un pregevole risultato consiste ad esempio nell'aver potuto dimostrare che nel caso di soglie periodiche risulta valida una approssimazione asintotica del tipo

$$(11) \quad g(t) \approx \alpha(t) e^{-\int_0^t \alpha(\tau) d\tau},$$

dove $\alpha(t)$ è una funzione periodica avente lo stesso periodo della soglia, ovvero, equivalentemente

$$g(t) \approx Z(t) e^{-\gamma(t)}$$

con $Z(t)$ anche essa periodica con lo stesso periodo della soglia. A titolo esemplificativo, nelle Figure 4–9 vengono mostrate le funzioni g e Z per alcuni valori dei parametri.

Le considerazioni appena svolte possono essere re-interpretate nel seguente suggestivo modo:

1. occorre risolvere un problema difficile (nella fattispecie la comprensione delle proprietà della densità del tempo di primo passaggio per un processo di Ornstein-Uhlenbeck);

2. il problema originario è stato trasformato in quello più semplice della determinazione dei momenti di tale densità;
3. mediante valutazioni numeriche si è scoperta una insospettata proprietà asintotica (tendenza alla esponenzialità) della incognita densità;
4. l'esistenza di tale proprietà asintotica ha condotto a congetturare prima, e poi a dimostrare, la validità di proprietà asintotiche anche nel caso più generale di soglie variabili nel tempo.

Un semplice esempio di come attraverso un procedimento indiretto sia possibile “sconfiggere” l'incertezza caratterizzante complessi risultati matematici è fornito dalla ricerca della soluzione f del problema:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + b(t, x) \frac{\partial f}{\partial x} + a(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \lim_{t \uparrow \tau} f(y, \tau | x, t) = \delta(y - x) \end{cases}$$

con

$$(13) \quad \begin{aligned} a(t, x) &= \frac{2t}{(\cos x + 2t)^2} \\ b(t, x) &= \frac{2t \sin x}{(\cos x + 2t)^3} - \frac{2x}{\cos x + 2t}. \end{aligned}$$

È palese la difficoltà di risolvere tale problema attraverso un approccio diretto. Si può, tuttavia, in alternativa osservare che la trasformazione

$$(14) \quad \begin{aligned} x' &= \Psi(t, x) = \left(\frac{k_1}{2t_0} \right)^{1/2} (\sin x + 2tx) + k_2 \\ t' &= \Phi(t) = \frac{k_1}{2t_0} (t^2 - t_1^2) + k_3 \\ f(y, \tau | x, t) &= \frac{\partial \Psi(\tau, y)}{\partial y} f'(y', \tau' | x', t') \end{aligned}$$

cambia il problema originario in quello seguente, molto più semplice:

$$\begin{cases} \frac{\partial f'}{\partial t'} + \frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2} = 0 \\ \lim_{t' \uparrow \tau'} f'(y', \tau' | x', t') = \delta(y' - x'), \end{cases}$$

questa volta di immediata risoluzione. Partendo dalla funzione f' così determinata si risale poi immediatamente all'incognita funzione f attraverso la trasformazione inversa. (Per una giustificazione di siffatte trasformazioni si rinvia agli articoli [9] e [19]

della bibliografia).

Un ulteriore esempio nel quale la procedura di trasformazione del problema originario si rivela particolarmente efficace è il seguente. Si consideri un processo stocastico markoviano e continuo $X(t)$ caratterizzato da densità di transizione

$$(15) \quad f(x, t | y, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) \leq x | X(\tau) \leq y).$$

Detta $S(t)$ una funzione continua dotata di derivata continua, si considerino la variabile tempo di primo passaggio e la associata densità di probabilità definite dalle (3) e (4). In virtù della continuità delle realizzazioni del processo e della sua natura markoviana, si perviene all'equazione (5), originariamente ricavata da R. Fortet ([16]). Con l'eccezione di alcuni casi non particolarmente interessanti, non è conosciuta la soluzione in forma chiusa di tale equazione nemmeno nel caso dei più semplici processi quando $S(t)$ sia di forma abbastanza generale. Né semplice è la ricerca di soluzioni numeriche a causa della singolarità del nucleo al tendere di θ a t . La difficoltà del problema conduce pertanto alla ricerca di stratagemmi o "trucchi" che ne semplifichino la natura e che risultino accessibili a metodi risolutivi. Un primo passo in questa direzione consiste nel dimostrare che l'equazione (5) è equivalente alla seguente:

$$(16) \quad g[S(t), t | y, \tau] = -2\psi[S(t), t | y, \tau] + 2 \int_{\tau}^t g[S(\vartheta), \vartheta | y, \tau] \psi[S(t), t | S(\vartheta), \vartheta] d\vartheta, \\ y \neq S(\tau),$$

dove si è posto

$$(17) \quad \psi[S(t), t | z, \vartheta] = \frac{d}{dt} F[S(t), t | z, \vartheta] + k(t) f[S(t), t | z, \vartheta] + r(t) \{1 - F[S(t), t | z, \vartheta]\}$$

con $k(t)$ e $r(t)$ funzioni per il momento arbitrarie.

L'apparente maggiore complessità della (16) rispetto alla (5) conseguente all'introduzione dei due "gradi di libertà" $k(t)$ e $r(t)$, in realtà si manifesta fittizia quando si osservi che una scelta opportuna di tali funzioni rende continuo il nucleo, individuando al contempo una classe di soglie $S(t)$ per le quali questo risulta identicamente nullo, così che l'incognita funzione g risulta determinata in forma chiusa ([3]). Più specificamente, mostriamo come in tal modo risulti possibile affrontare con successo la determinazione di g nel caso di due processi stocastici di particolare interesse anche per le applicazioni: il processo di Wiener ed il processo di Ornstein-Uhlenbeck del quale si è precedentemente detto.

PROCESSO DI WIENER

Sia $\{W(t); t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{R}\}$ il processo di Wiener con drift μ e varianza infinitesimale σ^2 , avente origine in $W(t_0) = x_0$:

$$\begin{aligned} E[W(t)] &= x_0 + \mu(t - t_0) \\ \text{Cov}\{W(t), W(s)\} &= \sigma^2 \min(t, s) \\ P\{W(t_0)\} &= x_0 = 1. \end{aligned}$$

Come è noto, per ogni x ed y reali, la densità di transizione è:

$$(18) \quad f(x, t|y, \tau) = [2\pi\sigma^2(t-\tau)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{[x-y-\mu(t-\tau)]^2}{2\sigma^2(t-\tau)} \right\}$$

cui corrisponde la funzione di distribuzione:

$$F(x, t|y, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{Erf} \left\{ \frac{[x-y-\mu(t-\tau)]}{[2\sigma^2(t-\tau)]^{1/2}} \right\} \right\}.$$

Se $S(t)$ è derivabile in $[t_0, +\infty)$, allora, riferendoci per brevità al solo caso $X(0) < S(t_0)$, per $x_0 < S(t_0)$ si ha:

$$(19) \quad \psi[S(t), t|y, \tau] = f[S(t), t|y, \tau] h(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} \times \left\{ 1 - \operatorname{Erf} \left\{ \frac{[S(t)-y-\mu(t-\tau)]}{[2\sigma^2(t-\tau)]^{1/2}} \right\} \right\}$$

con

$$h(t, \tau, y) = S'(t) - \frac{\mu}{2} - \frac{S(t)-y}{2(t-\tau)} + k(t)$$

e dove $\operatorname{Erf}(\cdot)$ è la funzione dell'errore:

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dy \exp(-y^2).$$

Per la classe di funzioni $S(t) \in C^2[t_0, +\infty)$, si dimostra che risulta:

$$(20) \quad \lim_{\tau \uparrow t} \psi[S(t), t|S(\tau), \tau] = 0 \quad \text{se e solo se} \quad k(t) = \frac{1}{2} [\mu - S'(t)] \quad \text{e} \quad r(t) \equiv 0.$$

Inoltre, si ha:

$$(21) \quad \psi[S(t), t|S(\tau), \tau] = 0 \quad \forall t, \tau : t_0 \leq \tau < t \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \uparrow t} \psi[S(t), t|S(\tau), \tau] = 0$$

se e solo se

$$S(t) = at + b, \quad k(t) = \frac{\mu - a}{2} \quad \text{e} \quad r(t) \equiv 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, dalla (16) e dalla (21) si ottiene immediatamente la densità di probabilità di primo passaggio attraverso soglia lineare per il processo di Wiener considerato avendosi:

$$g(at + b, t|x_0, t_0) = \frac{|at_0 + b - x_0|}{t - t_0} f(at + b|x_0, t_0), \quad x_0 \neq at_0 + b$$

con f data dalla (18). Nel caso di soglie arbitrarie di classe C^2 , con le scelte di $k(t)$ e $r(t)$ come in (20), si conclude poi che la (16) possiede un'unica soluzione continua,

facilmente determinabile con le tecniche numeriche disponibili essendo stata rimossa la singolarità del nucleo.

PROCESSO DI ORNSTEIN-UHLENBECK

Sia ora $\{X(t); t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{R}\}$ il processo di Ornstein-Uhlenbeck con

$$A_1(x) = \alpha x + \beta, \quad A_2(x) = \sigma^2$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, che qui consideriamo con una leggera generalizzazione rispetto al caso prima considerato. Con i momenti infinitesimali indicati, per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $\tau < t$, la densità di transizione risulta essere:

$$(22) \quad f(x, t|y, \tau) = \left\{ \frac{\exp[-2\alpha(t-\tau)] \alpha}{\pi \sigma^2 \{1 - \exp[-2\alpha(t-\tau)]\}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ \frac{-\alpha[(x + \beta/\alpha) \exp[-\alpha(t-\tau)] - (y + \beta/\alpha)]^2}{\sigma^2 [1 - \exp(-2\alpha(t-\tau))]} \right\}$$

Se $S(t)$ è derivabile in $[t_0, +\infty)$, allora per $x_0 < S(t_0)$ si ha:

$$\psi[S(t), t|y, \tau] = f[S(t), t|y, \tau] H(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} \{1 - \text{Erf}[M(t, \tau)]\},$$

dove

$$H(t, \tau, y) = S'(t) - \alpha[S(t) + \beta/\alpha] - \frac{\alpha \exp[\alpha(t-\tau)]}{1 - \exp[-2\alpha(t-\tau)]} \times \{[S(t) + \beta/\alpha] \exp[-\alpha(t-\tau)] - (y + \beta/\alpha)\} + k(t)$$

e

$$M(t, \tau) = \{[S(t) + \beta/\alpha] \exp[-\alpha(t-\tau)](y + \beta/\alpha)\} \times \left\{ \frac{\alpha}{\sigma^2 \{1 - \exp[-2\alpha(t-\tau)]\}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Sia ora $S(t) \in C^2[t_0, +\infty)$. È possibile allora dimostrare che risulta:

$$(23) \quad \lim_{\tau \uparrow t} \psi[S(t), t|S(\tau), \tau] = 0 \text{ se e solo se } k(t) = \frac{1}{2} [\alpha \cdot S(t) + \beta - S'(t)] \text{ e } r(t) \equiv 0.$$

Inoltre, si ha:

$$(24) \quad \psi[S(t), t|S(\tau), \tau] = 0 \quad \forall t, \tau: t_0 \leq \tau < t \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \uparrow t} \psi[S(t), t|S(\tau), \tau] = 0$$

se e solo se $S(t) = -(\beta/\alpha) + A \exp(\alpha t) + B \exp(-\alpha t)$, $k(t) = B\alpha \exp(-\alpha t)$ e $r(t) \equiv 0$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Ancora una volta, le condizioni (23) e (24) assicurano rispettivamente la semplice risolubilità dell'equazione (16), essendo stata eliminata la singolarità del nucleo

nell'equazione originaria, oltre a fornire la funzione g in forma chiusa per soglie di tipo parabolico. Infatti, posto $S(t) = -\frac{\beta}{\alpha} + A \exp(\alpha t) + B \exp(-\alpha t)$, dalle equazioni (23) e (24) segue:

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = 2\alpha \frac{A \exp(\alpha t_0) + B \exp(-\alpha t_0) - x_0 - \beta/\alpha}{\exp[\alpha(t-t_0)] - \exp[-\alpha(t-t_0)]} f[S(t), t|x_0, t_0],$$

con $x_0 \neq -\beta/\alpha + A \exp(\alpha t_0) + B \exp(-\alpha t_0)$.

Le considerazioni svolte sottolineano quanto inizialmente affermato, ossia che problemi apparentemente non risolvibili o di soluzione eccessivamente riposta possano giovare di artifici mediante i quali, anche attraverso un'apparente aumento di complessità, risulta in ultima analisi possibile pervenire alle soluzioni ricercate, eliminando il livello iniziale di incertezza legato alla complessità del problema.

2.3. Ancora sull'incertezza per complessità

In quanto appena descritto si è calcolato l'accento su un esempio nel quale l'evidente incertezza per complessità di formule risolutive si è progressivamente affievolita grazie a trasformazioni opportune o a risultati suggeriti da esperimenti computazionali. Vedremo ora, invece, un esempio di problema perfettamente risolto sotto il profilo analitico che, tuttavia, ancora sfugge ad una comprensione delle proprietà della soluzione. Specificamente, riferiamoci ad un processo Gaussiano non singolare e stazionario $X(t)$ a media $E[X(t)] = 0$ e covarianza

$$E[X(t)X(\tau)] = \gamma(t-\tau) = \gamma(\tau-t), \quad \text{con} \quad \gamma(0) = 1, \dot{\gamma}(0) = 0, \ddot{\gamma}(0) < 0.$$

Siano poi $S(t) \in C^1[0, +\infty)$ un'arbitraria funzione tale che $X(0) = x_0 < S(0)$, T il tempo di primo passaggio di $X(t)$ attraverso $S(t)$ definito dalla (4) e g come in (3). In virtù della continuità delle realizzazioni del processo, tale densità può dimostrarsi essere esprimibile come la seguente serie (convergente) di tipo Rice, costruita facendo uso del principio di inclusione-esclusione, e che pertanto fornisce la funzione g attraverso approssimazioni successive alternativamente per eccesso e per difetto:

$$(25) \quad g(S(t), t|x_0) = W_1(t|x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{i-1}}^t W_{i+1}(t_1, \dots, t_i, t|x_0) dt_i,$$

dove

$$(26) \quad W_1(t|x_0) = \frac{|\Lambda_3(t)|^{1/2}}{2\pi[1-\gamma^2(t)]} \exp\left\{-\frac{[S(t)-x_0\gamma(t)]^2}{2[1-\gamma^2(t)]}\right\} \\ \times \left[\exp\left\{-\frac{\sigma^2(t|x_0)}{2}\right\} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma(t|x_0) \operatorname{Erfc}\left(\frac{\sigma(t|x_0)}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

$$(27) \quad \begin{aligned} |\Lambda_3(t)| &= -\ddot{\gamma}(0) [1 - \gamma^2(t)] - [\dot{\gamma}(t)]^2 \\ \sigma(t|x_0) &= \left(\frac{1 - \gamma^2(t)}{|\Lambda_3(t)|} \right)^{1/2} \left\{ \dot{S}(t) + \frac{\dot{\gamma}(t) [\gamma(t)S(t) - x_0]}{1 - \gamma^2(t)} \right\} \end{aligned}$$

e dove $\text{Erfc}(z)$ denota la funzione dell'errore complementare:

$$(28) \quad \text{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Le funzioni $W_n(t_1, \dots, t_n|x_0)$ sono a loro volta definite come segue:

$$(29) \quad \begin{aligned} W_n(t_1, \dots, t_n|x_0) &= \int_{\dot{S}(t_1)}^{+\infty} dy_1 \int_{\dot{S}(t_2)}^{+\infty} dy_2 \cdots \int_{\dot{S}(t_n)}^{+\infty} \prod_{i=1}^n [y_i - \dot{S}(t_i)] \\ &\quad \times p_{2n}[S(t_1), t_1; \dots; S(t_n), t_n; y_1, t_1; \dots; y_n, t_n|x_0] dy_n, \end{aligned}$$

dove le $p_{2n}(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n; y_1, t_1; \dots, y_n, t_n|x_0)$ denotano le densità di probabilità congiunte delle $2n$ variabili casuali $X(t_1), \dots, X(t_n), Y(t_1) = \dot{X}(t_1), \dots, Y(t_n) = \dot{X}(t_n)$ condizionate da $X(0) = x_0$. Attraverso dei calcoli piuttosto laboriosi è possibile ottenere la forma esplicita di tali densità:

$$(30) \quad p_{2n}(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n; y_1, t_1; \dots; y_n, t_n|x_0) = \frac{1}{(2\pi)^n |\Lambda_{2n+1}(t_1, \dots, t_n)|^{1/2}} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2 |\Lambda_{2n+1}(t_1, \dots, t_n)|} \sum_{i,j=1}^{2n} l_{i+1,j+1}(t_1, \dots, t_n) [\hat{x}_i - x_0 \hat{\gamma}(t_i)] [\hat{x}_j - x_0 \hat{\gamma}(t_j)] \right\}.$$

Qui $l_{i+1,j+1}(t_1, \dots, t_n)$ denota il complemento algebrico dell'elemento $\lambda_{i+1,j+1}(t_1, \dots, t_n)$ della matrice di covarianza $\Lambda_{2n+1}(t_1, \dots, t_n)$ di $X(0), X(t_1), \dots, X(t_n), \dot{X}(t_1), \dots, \dot{X}(t_n)$:

$$(31) \quad \lambda_{i+1,j+1}(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} E[X(t_i)X(t_j)] = \gamma(t_i - t_j) \\ \quad = \gamma(t_j - t_i), \\ \quad (i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n) \\ E[X(t_i)\dot{X}(t_{j-n})] = -\dot{\gamma}(t_i - t_{j-n}) \\ \quad = \dot{\gamma}(t_{j-n} - t_i), \\ \quad (i = 0, 1, \dots, n, j = n + 1, \dots, 2n) \\ E[\dot{X}(t_{i-n})X(t_j)] = \dot{\gamma}(t_{i-n} - t_j) \\ \quad = -\dot{\gamma}(t_j - t_{i-n}), \\ \quad (i = n + 1, \dots, 2n, j = 0, \dots, n) \\ E[\dot{X}(t_{i-n})\dot{X}(t_{j-n})] = -\ddot{\gamma}(t_{i-n} - t_{j-n}) \\ \quad = -\ddot{\gamma}(t_{j-n} - t_{i-n}), \\ \quad (i = n + 1 \dots, 2n, j = n + 1 \dots, 2n), \end{cases}$$

dove si è posto

$$\widehat{x}_i := \begin{cases} x_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ y_{i-n}, & i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases}$$

$$\widehat{\gamma}(t_i) := \begin{cases} \gamma(t_i), & i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{\gamma}(t_{i-n}), & i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases}$$

e dove detta A una matrice, con $|A|$ si è denotato il suo determinante.

È immediato così rendersi conto come le formule sopra riportate male, o niente affatto, si prestino a valutazioni quantitative a causa della insopportabile complessità dei termini della serie (25) coinvolgenti integrazioni in domini di dimensionalità sempre crescente ed involventi funzioni altamente singolari.

È questo un ulteriore illuminante esempio di come estrema incertezza consegua da pur deterministicamente specificate formule esprimenti la rigorosa soluzione di un problema matematico.

3. Altri tipi di incertezze

Negli esempi sopra discussi si è sottolineato come in problemi matematici ben posti e perfettamente risolti sotto il profilo analitico possa risultare insito un elevato, se non totale, livello d'incertezza a causa della complessità delle formule risolutive. Pur potendosi quindi concludere che la soluzione al problema è stata ottenuta in forma completa ed analiticamente precisata senza ambiguità alcuna, l'informazione che se ne trae dalla relativa ispezione è di fatto nulla in quanto, a meno di improbabili approssimazioni numeriche, non risulta possibile effettuare deduzioni certe sul comportamento dei fenomeni cui dette formule si riferiscono. Si tratta, quindi, in sintesi, di un'incertezza che nasce dalla complessità delle soluzioni ottenute ovvero, come si è sottolineato, dall'impossibilità di sviluppare una qualche intuizione su grandezze le cui misure sono espresse da numeri ben al di fuori degli intervalli per i quali la nostra esperienza vissuta ha sviluppato una qualche oggettiva personale intuizione o attendibile valutazione.

Proseguiamo ora in questo excursus attraverso il concetto di incertezza.

3.1. Incertezza per rappresentazione

Fissiamo l'attenzione sulla successione di cifre decimali

$$(32) \quad 3, 7, 3, 0, 9, 5, 0, 4, 8, 8, 0, 1, 6, 8, 8, 7, 2, 4, 2, 0, 9 \dots$$

Appare subito chiaro che non emerge alcuna regolarità, ossia che dette cifre non si susseguono con un identificabile o prevedibile ordine. Si tratta, dunque, di una successione "casuale" di cifre? Proprio casuale non sembra essere, in quanto, come forse direbbe uno statistico, sono presenti troppi 8 e 0, mentre è del tutto assente il numero 2. Ancora più decisa è la affermazione di assenza di "regolarità" della successione

$$(33) \quad 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots,$$

mentre le successioni

$$(34) \quad 1, \dots,$$

ovvero

$$(35) \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, \dots$$

manifestano indubbiamente un assoluto grado di regolarità, così che per entrambe non risulta ragionevole parlare di casualità, quale che sia il significato che si intende attribuire a tale termine. Osserviamo che, peraltro, le quattro successioni di cui sopra potrebbero costituire il risultato delle uscite di 21 lanci ripetuti di un ipotetico dado a dieci facce (in realtà icosaedrico, con qualche cautela nella registrazione dei risultati delle uscite), ciascuna successione essendo caratterizzata da probabilità di occorrenza 10^{-21} : piccolissima sì, ma non nulla. Né significativa differenza farebbe l'uso di un dado leggermente truccato. In conclusione, non risulta possibile stabilire a priori, per semplice ispezione, se tali successioni sono state generate o meno in maniera “casuale” ad esempio mediante lanci ripetuti del dado di cui si è detto, né, nel caso in cui ciò fosse avvenuto, se il dado era truccato o se i lanci successivi erano tra loro indipendenti o meno.

A questo punto, sembrerebbe comunque ragionevole interpretare la “casualità” come assenza di regolarità così che dovremmo considerare come non affette da casualità le successioni (34) e (35). Ma che dire delle (32) e (33)? In entrambe non si riscontrano cifre o gruppi di cifre ripetentisi con regolarità, anche se nella prima, come si è detto, alcune cifre sono ripetutamente presenti mentre una è completamente assente. Nella seconda, invece, soltanto due cifre sono presenti, anche se in ordine apparentemente casuale.

È a questo punto istruttivo osservare che se ad esempio la (32) viene completata premettendo ed aggiungendo altre cifre, in modo da ottenere la nuova successione

$$(36) \quad 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 3, 0, 9, 5, 0, 4, 8, 8, 0, 1, 6, 8, 8, \dots,$$

si vede che questa volta tutte le cifre da 0 a 9 sono presenti, anche se susseguentisi in maniera apparentemente casuale. Ebbene, è interessante osservare che le successioni (32), (33) e (36) in realtà non sono affatto il risultato di esperimenti casuali, ma sono invece costruite mediante procedure rigorosamente deterministiche. Invero, la (32) è la successione delle 21 cifre della rappresentazione decimale del numero radice quadrata di 2^{\S} nelle posizioni dalla decima alla trentesima dopo la virgola, mentre la (33) rappresenta le 21 cifre presenti sia prima che dopo la virgola nella rappresentazione binaria di $\sqrt{2}$. Quindi, che si utilizzi la notazione decimale oppure quella binaria, la successione di cifre di $\sqrt{2}$ presenta caratteristiche di apparente casualità. Si può dunque concludere che il numero irrazionale $\sqrt{2}$ è rappresentato comunque da successioni di cifre a carattere casuale? La risposta è negativa, come appare immediatamente se, in

[§]Risulta invero $\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85696\dots$

alternativa, si ricorre alla rappresentazione di $\sqrt{2}$ in frazioni continue:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

In tale rappresentazione, il numero $\sqrt{2}$ è infatti espresso dalla successione

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots$$

che nulla ha di casuale o irregolare. In conclusione, ci si trova di fronte a quello che mi sembra appropriato definire quale “casualità per rappresentazione”. Preliminarmente al porre quesiti in merito al grado di casualità di una successione di cifre quali quelle esemplificativamente sopra riportate, appare indispensabile precisare il “contesto”, ivi incluso il tipo di rappresentazione alla quale si intende fare riferimento.

Nel caso di rappresentazione decimale, ci si può così chiedere quale delle ben note costanti matematiche

$$\begin{aligned} \pi &= 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643\dots \\ e &= 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0287\dots \\ e^\pi &= 23,14069\ 26327\ 79269\ 00572\ 9088\dots \\ \pi^e &= 22,45915\ 77183\ 61045\ 47342\ 7153\dots \\ \gamma &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \\ &= 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6512\dots \end{aligned}$$

sia “la più casuale”. Ebbene, alla metà del secolo scorso risale la conclusione che ad esempio “ π è più casuale di e ” [18].

3.2. Determinismo e incertezza

Riferiamoci ad un modello di crescita di una popolazione (batteri, o altro) riproducenti in tempo discreto in un ambiente caratterizzato da capacità di contenimento (carrying capacity) limitata, come realisticamente accade a causa della limitatezza delle risorse disponibili, dell’accumulo di sostanze tossiche, ecc. Una situazione ben nota, alla quale è consuetudine far spesso ricorso nella modellistica biologica, è quella caratterizzante crescita “logistica” che, a valle delle consuete operazioni di normalizzazione, possiamo rappresentare nella forma seguente:

$$(37) \quad x_{i+1} = \alpha x_i (1 - x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Qui il tempo è riguardato come una successione di istanti $0, 1, 2, \dots$ ed α è un parametro reale caratterizzante la popolazione considerata. A partire da un prefissato valore iniziale x_0 e fissato α , mediante la (37) si calcolano iterativamente i successivi valori

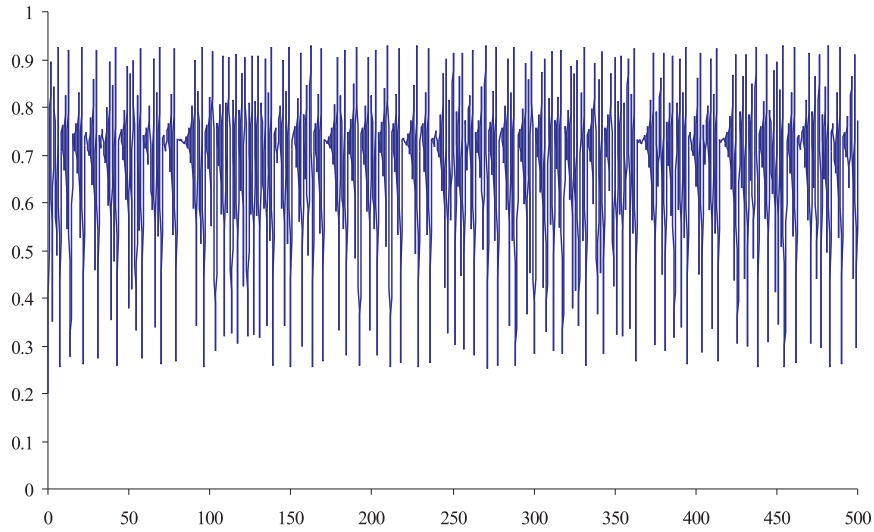


Figura 10: Grafico di $x_{n+1} = 3.7 \cdot x_n(1 - x_n)$, $x_0 = 0.2$.

(normalizzati) del numero di individui x_1, x_2, \dots costituenti le generazioni successive. Come la (37) mostra, questo “sistema dinamico” è caratterizzato dal punto di equilibrio $\rho = 1 - 1/\alpha$. Per $\alpha = 1$, partendo dal valore x_0 la popolazione va monotonicamente all’estinzione, mentre, ad esempio, partendo da $x_0 = 0.2$, per $\alpha = 3$ essa decresce con oscillazioni smorzate al punto di equilibrio $\rho = 2/3$. In maniera analoga, si può determinare la successione delle consistenze delle successive generazioni al variare del parametro α . Così facendo, si perviene ad una piuttosto sorprendente constatazione per talune scelte di α . Ad esempio, per $\alpha = 3.7$, corrispondente al punto di equilibrio $\rho = 0.72973$, si osserva un comportamento alquanto “caotico”, nel senso che la successione dei valori x_1, x_2, \dots tende sì a tale punto di equilibrio, ma esibendo caratteristiche apparentemente casuali, come mostrato in Fig. 10. Invero, dall’osservazione di tale figura risulta impossibile stabilire se i valori osservati sono il risultato di un meccanismo di tipo aleatorio o se, invece, sono ottenuti, come ben sappiamo, mediante un’equazione descrivente un sistema rigorosamente deterministico. Se ne conclude che esistono situazioni nelle quali l’incertezza è conseguenza della natura stessa di talune soluzioni di equazioni descriventi l’evoluzione di sistemi retti da leggi rigorosamente deterministiche. Ci piace qui menzionare che approfondite considerazioni concernenti proprietà di equazioni includenti quelle di tipo (37) sono presenti nel bel trattato di Paul Cull et al. [12] il cui titolo fa evidentemente riferimento al nostro Fibonacci.

n	P_n
1	1.0
2	0.5
3	0.6666666
4	0.6250000
5	0.6333333
6	0.6319444
7	0.6321428
8	0.6321180
9	0.6321208
10	0.6321205

Tabella 3: tabella delle coincidenze

3.3. Incertezza e probabilità

Che in situazioni descrivibili in termini probabilistici sia legato un qualche livello di incertezza è indubitabilmente vero. Eppure, talora accade che anche in contesti nei quali previsioni certe non sono possibili per la presenza di elementi intrinsecamente aleatori, il grado di incertezza risulti trascurabile tanto da poter effettuare previsioni con la pratica certezza di non sbagliare. Un tipico esempio è fornito dal ben noto problema della coincidenza dei compleanni: qual è la probabilità che tra n persone scelte a caso ve ne siano almeno due il cui compleanno cade nel medesimo giorno? Per $n < 365$ (qui non consideriamo gli anni bisestili) tale probabilità è evidentemente $Q_n = 1 - [365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)] / (365)^n$ che rapidamente tende ad 1 al crescere di n . Come indicato in Fig. 11, già con sole 50 persone la probabilità di coincidenza è quasi del 98%, superando il 99% nel caso di 60 persone. (Né tali risultati cambiano se qualcuno dichiara il falso in merito al proprio compleanno!) Interessante è anche la situazione nella quale si inseriscono a caso in altrettante buste preindirizzate n lettere destinate a persone diverse e ci si chiede quale sia la probabilità P_n che almeno una lettera pervenga al corretto destinatario. Contro la comune intuizione, si dimostra che il livello di massima incertezza, pari a 0.5 nel caso di due sole lettere, viene rapidamente, ma modestamente, ridotto già nel caso di tre lettere, e che non molto si guadagna all'ulteriore crescere del numero di lettere. Risulta infatti:

$$P_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1 - e^{-1} = 0.6321205.$$

La Tabella 3 mostra il rapido stabilizzarsi dei valori di P_n al crescere di n . Sono questi due esempi che dimostrano come praticate certezze possano scaturire in contesti retti da leggi squisitamente aleatorie ($Q_n \simeq 1$ per $n > 60$ e $P_n \simeq 1 - e^{-1}$ per $n > 9$).

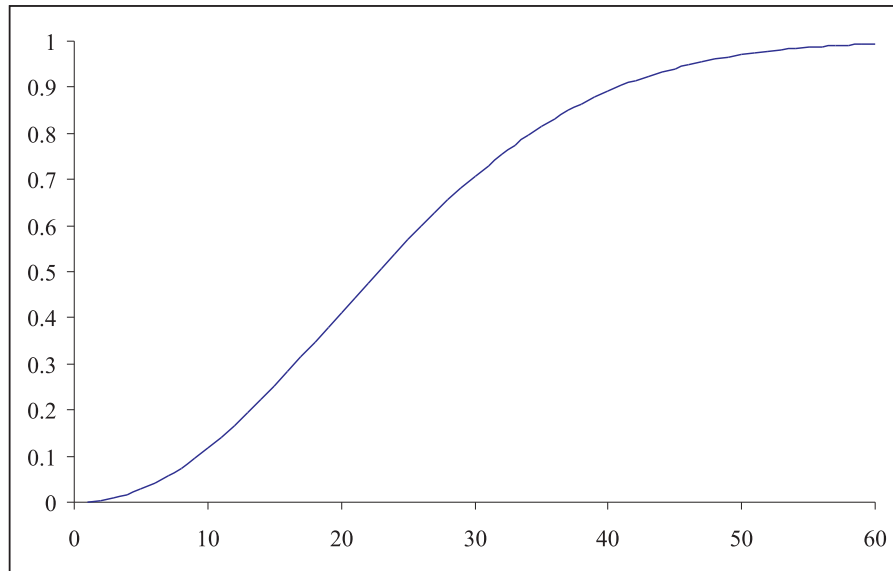


Figura 11: Grafico della probabilità di coincidenza di compleanni in funzione del numero di persone considerate.

Un ulteriore esempio atto ad indicare come risultati certi possano conseguire da situazioni caratterizzate da intrinseca incertezza è offerto dal cosiddetto paradosso di Parrondo che può schematicamente enunciarsi al seguente modo: la partecipazione di un giocatore ad un gioco complessivo consistente in alternanze di due giochi singolarmente perdenti può comportare vincita certa.[¶] Tale affermazione, della quale ci accingiamo a fornire una esemplificazione matematica, pienamente giustifica il termine “paradosso” utilizzato, indicando al contempo come talora la semplice intuizione possa risultare ingannevole o fuorviante. Supponiamo dunque che un giocatore, che dispone di un fissato capitale iniziale X_0 in arbitrarie ma fissate unità (euro, dollari, ...), partecipi ad un gioco che prevede l’alternanza (stocastica) di due giochi A e B , entrambi consistenti nel lancio di una moneta non equa, caratterizzato dalla seguente regola: il giocatore vince 1 se si verifica Testa (T) e -1 (ossia perde 1) se si verifica Croce (C). Assumiamo inoltre, per semplicità, che l’alternanza dei due giochi sia determinata da un generatore di numeri casuali uniformi in $(0, 1)$ con la regola che la probabilità di giocare il gioco A sia $P(A) = \pi_A$ e la probabilità di giocare il gioco B sia $P(B) = 1 - \pi_A$.

Caratterizziamo i giochi A e B come segue. Per il gioco A , siano

$$\begin{aligned} P(T) &= 0,5 - \varepsilon := p_A \\ P(C) &= 0,5 + \varepsilon := 1 - p_A \end{aligned}$$

le probabilità di uscita di testa e croce, rispettivamente, con ε un numero reale positivo

[¶]Nel seguito ci riferiremo sempre a vincite e perdite non in senso assoluto, ma in media.

opportunamente scelto. Il gioco B , invece, a sua volta consiste di due giochi alternativi così specificati: se X_n è il capitale iniziale (intero) posseduto dal giocatore al momento della partita n -esima, allora le probabilità di uscita di testa e croce sono specificate come segue. Se $X_n \bmod 3 \neq 0$ allora

$$(38) \quad \begin{cases} P(T) = 0,75 - \varepsilon := p_{B_1} \\ P(C) = 0,25 + \varepsilon := 1 - p_{B_1}. \end{cases}$$

Se invece risulta $X_n \bmod 3 = 0$, allora

$$(39) \quad \begin{cases} P(T) = 0,10 - \varepsilon := p_{B_2} \\ P(C) = 0,90 + \varepsilon := 1 - p_{B_2}. \end{cases}$$

Analizziamo singolarmente le caratteristiche dei giochi A e B .

GIOCO A

Nel caso in cui vi sia il solo gioco A , si ha $P(A) = \pi_A = 1$. Poniamo, per rendere l'esempio concreto, $\varepsilon = 0,005$ e denotiamo con V_i^A ($i = 1, 2, \dots$) la vincita conseguente all' i -esima giocata in presenza del solo gioco A . Evidentemente si tratta di una variabile aleatoria la cui distribuzione di probabilità, che non dipende dall'ordine della giocata, è specificata dal seguente schema:

$$V_i^A = V^A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,5 + \varepsilon & 0,5 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che per la vincita media si ha

$$(40) \quad E(V^A) = -2\varepsilon$$

e che all' n -esima partita il capitale X_n è dato da:

$$(41) \quad X_n = x_0 + \sum_{i=1}^n V_i^A.$$

Tale capitale può visualizzarsi come una marcia a caso che parte dal valore iniziale x_0 . Il capitale medio all' n -esima giocata è pertanto

$$(42) \quad E(X_n) = x_0 + nE(V^A) = x_0 - 0,01n$$

dove si è fatto uso delle (40) e (41). In conclusione, il gioco A risulta essere perdente in media.

GIOCO B

Supponendo di effettuare il solo gioco B , si ha $\pi_B \equiv P(B) = 1$ cosicché occorre considerare le soprascripte regole (38) e (39). Poniamo nuovamente

$\varepsilon = 0,005$. In questo caso, con analogia interpretazione delle variabili casuali esprimenti le vincite, per $i = 1, 2, \dots$, si ha:

$$V_i^{B_1} = V^{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,25 + \varepsilon & 0,75 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$V_i^{B_2} \equiv V^{B_2} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,90 + \varepsilon & 0,10 - \varepsilon \end{pmatrix},$$

e quindi

$$(43) \quad \begin{aligned} E(V^{B_1}) &= 0,5 - 2\varepsilon \\ E(V^{B_2}) &= -0,8 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Non è difficile convincersi che il capitale X_n è esprimibile al seguente modo

$$X_n = x_0 + \sum_{i=1}^n \left(V_i^{B_2} I_{X_{i-1} \bmod 3 = 0} + V_i^{B_1} I_{X_{i-1} \bmod 3 = 1} + V_i^{B_1} I_{X_{i-1} \bmod 3 = 2} \right).$$

Al fine di calcolarne il valore medio, occorre specificare le probabilità degli eventi

$$\{X_i \bmod 3 = k\} \text{ per } k = 0, 1, 2.$$

Osserviamo a tal fine se $\forall i < n$ si assumesse

$$(44) \quad \begin{cases} P(X_i \bmod 3 = 0) = \frac{1}{3} \\ P(X_i \bmod 3 = 1) = \frac{1}{3} \\ P(X_i \bmod 3 = 2) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

risulterebbe

$$(45) \quad \begin{aligned} E(X_n) &= x_0 + n \left[E(V^{B_2}) \frac{1}{3} + E(V^{B_1}) \frac{1}{3} + E(V^{B_1}) \frac{1}{3} \right] \\ &= x_0 + 0,05\bar{6}n, \end{aligned}$$

e il gioco B sarebbe vincente in media. In realtà l'ipotesi di equiprobabilità (44) è affatto ingiustificata. Al fine di pervenire ad una stima delle probabilità suddette, formalizziamo il problema mediante una catena di Markov a tre stati, 0, 1, 2 rappresentanti rispettivamente le classi $[0]_3 \equiv X_i \bmod 3 = 0$, $[1]_3 \equiv X_i \bmod 3 = 1$ e $[2]_3 \equiv X_i \bmod 3 = 2$. Le rispettive probabilità di transizione, in virtù delle (38) e (39), risultano soddisfare il sistema seguente:

$$\begin{bmatrix} p_0(n+1) \\ p_1(n+1) \\ p_2(n+1) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ p_2(n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & p_{B_2} & 1 - p_{B_2} \\ 1 - p_{B_1} & 0 & p_{B_1} \\ p_{B_1} & 1 - p_{B_1} & 0 \end{bmatrix}$$

ossia, con le scelte effettuate, esplicitamente:

$$(46) \quad \begin{bmatrix} p_0(n+1) \\ p_1(n+1) \\ p_2(n+1) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ p_2(n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0,10 - \varepsilon & 0,90 + \varepsilon \\ 0,25 + \varepsilon & 0 & 0,75 - \varepsilon \\ 0,75 - \varepsilon & 0,25 + \varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice di transizione ammette 1 come autovalore di modulo massimo, l'esistenza della distribuzione stazionaria è assicurata.

Pertanto, posto $P([0]_3) = p_0$, $P([1]_3) = p_1$, $P([2]_3) = p_2$, il sistema (46) diventa

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0,10 - \varepsilon & 0,90 + \varepsilon \\ 0,25 + \varepsilon & 0 & 0,75 - \varepsilon \\ 0,75 - \varepsilon & 0,25 + \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

avente soluzione

$$(47) \quad \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,383612 \\ 0,154281 \\ 0,462108 \end{bmatrix}.$$

Nella propria evoluzione, la catena di Markov converge verso i tre stati stazionari caratterizzati dalle probabilità (47). C'è quindi da attendersi che al crescere del numero delle giocate il valore medio del capitale decresce all'incirca linearmente con il numero delle giocate avendosi

$$\begin{aligned} E(X_n) &\cong x_0 + n [E(V^{B_2}) \cdot p_0 + E(V^{B_1}) \cdot p_1 + E(V^{B_1}) \cdot p_2] \\ &\cong x_0 - 0,008695 \cdot n. \end{aligned}$$

In conclusione, possiamo affermare che nel lungo termine il gioco B è perdente in media.

Dunque, singolarmente considerati, i giochi A e B risultano entrambi perdenti in media. Torniamo ora al problema iniziale, ossia al gioco consistente nell'alternanza stocastica di A e B . Anche in questo caso possiamo schematizzare il problema con una catena di Markov a tre stati, $[0]_3$, $[1]_3$ e $[2]_3$, la cui matrice di transizione M risulta essere

$$\begin{bmatrix} 0 & \pi_A p_A + \pi_B p_{B_2} & \pi_A(1 - p_A) + \pi_B(1 - p_{B_2}) \\ \pi_A(1 - p_A) + \pi_B(1 - p_{B_1}) & 0 & \pi_A p_A + \pi_B p_{B_1} \\ \pi_A p_A + \pi_B p_{B_1} & \pi_A(1 - p_A) + \pi_B(1 - p_{B_1}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Di nuovo questa ammette l'unità come autovalore di modulo massimo così che la catena è caratterizzata da una distribuzione stazionaria, $P([0]_3) = p_0$, $P([1]_3) = p_1$, $P([2]_3) = p_2$ che si ottiene risolvendo il sistema

$$(48) \quad \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}^T M,$$

il che richiede che venga fissata π_A . Quale concreto esempio, rendiamo equiprobabili i due giochi ponendo $\pi_A = 0,5$. Ne segue:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,345070 \\ 0,254108 \\ 0,400822 \end{pmatrix}.$$

Ricordando le (40) e (43), il capitale alla partita n -esima risulta esprimibile al seguente modo:

$$X_n = x_0 + \sum_{i=1}^n \left(V_i^A I_A + V_i^{B_2} I_{X_{i-1} \bmod 3=0} + V_i^{B_1} I_{X_{i-1} \bmod 3=1} + V_i^{B_1} I_{X_{i-1} \bmod 3=2} \right).$$

Per $i \gg 1$ si ha pertanto:

$$\begin{aligned} E(X_n) &\cong x_0 + n [E(V^A) \cdot \pi_A + E(V^{B_2}) \cdot p_0 + E(V^{B_1}) \cdot p_1 + E(V^{B_1}) \cdot p_2] \\ &\cong x_0 + 0,0015704 \cdot n. \end{aligned}$$

Questo risultato è sorprendentemente in contrasto con l'intuizione nel senso che, sotto opportune ipotesi, l'alternanza stocastica di due giochi perdenti risulta in definitiva vincente.

4. Incertezza e funzionalità

Due affascinanti, paradigmatici esempi di situazioni comportanti elevati livelli di incertezza, con conseguente ipotizzabile ridotto livello di funzionalità, sono costituiti dalle strutture e dai meccanismi preposti all'assolvimento di funzioni essenziali per la gran parte degli organismi viventi riguardati sotto il binomio "cervello-muscoli": attività di pensiero e capacità di movimento. Nelle considerazioni che seguono ci soffermeremo, sia pur necessariamente con la dovuta sintesi, sull'esposizione di alcune delle sorprendenti proprietà che caratterizzano, sia pure in un generale contesto di incertezze, strutture e meccanismi concernenti le funzioni sopramenzionate. Il fine è di sottolineare come elevati livelli di incertezza, dovuti a complessità strutturali o alla presenza di perturbazioni o "rumori" ambientali, non siano necessariamente lesivi di efficiente funzionalità ma, al contrario, possano essere utilizzati da taluni sistemi per ottenere aumenti di efficacia e rendimento.

4.1. Cervelli

Verso la fine del XIX secolo l'anatomista spagnolo Santiago Ramón y Cajal e la sua Scuola giunsero alla conclusione che i sistemi nervosi animali sono costituiti da un gran numero di unità fondamentali molto ben caratterizzate nella loro struttura, le cellule nervose o *neuroni*, intercollegate a costituire intricatissime reti che ancora oggi sfuggono ad una completa, dettagliata descrizione. È stato poi successivamente compreso

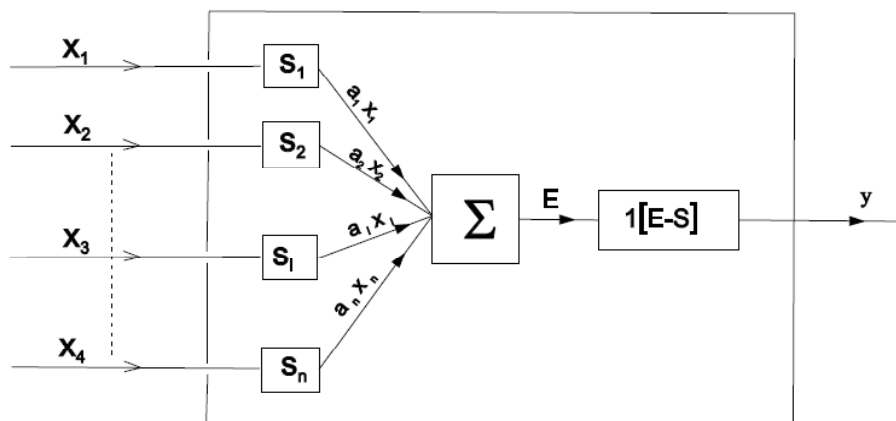


Figura 12: Neurone rappresentato come elemento lineare a soglia.

che i neuroni rappresentano anche dal punto di vista funzionale le unità fondamentali del sistema nervoso e che i segnali elettrici viaggianti in tali reti trasportano l'informazione che dette cellule si scambiano risultando pertanto responsabili delle cosiddette "attività di pensiero" nonché delle risposte alle stimolazioni che l'organismo subisce da parte dell'ambiente nel quale opera.

Il sistema nervoso dell'uomo consta di una decina di miliardi di neuroni presenti essenzialmente su di una superficie di circa 1200 cm^2 (corteccia cerebrale) che circonda una massa (encefalo) occupante un volume di circa un litro, il cosiddetto *cervello*, con conseguente densità di 10 milioni di neuroni per centimetro cubo. Il volume di un neurone è di circa 10^{-7} cm^3 , pur potendosi avere grande variabilità di forme; la "linea di trasmissione" (assone) che consente il trasferimento di informazione da un neurone ad altri elementi della rete, di lunghezza variabile da una decina di micron a circa un metro, consente una velocità di propagazione dei segnali elettrici variabile tra 0.6 e 120 metri al secondo; il corpo cellulare (soma) dal quale fuoriesce l'assone, pur nella variabilità di forme di cui si è detto, ha dimensione lineare di una decina di micron; riguardato come dispositivo fisico, nella propria attività il neurone è assimilabile ad una lampadina della potenza di un milionesimo di watt.

Si immagini ora di interconnettere questi dieci miliardi di neuroni a costituire la rete del sistema nervoso. Anzitutto: quante reti distinte si potrebbero costruire con questi neuroni? Lasciando il calcolo al lettore, ci si limita qui a menzionare che se i neuroni fossero soltanto 100 si otterrebbero 2^{100} , pari a circa 10^{30} , reti distinte che, se enumerate alla velocità di 10 miliardi di reti al secondo, comporterebbero un tempo complessivo di enumerazione di 10^{20} secondi, ossia circa un migliaio di volte maggiore della vita stimata dell'Universo! Ci troviamo dunque di fronte a potenzialmente intricatissimi, indescrivibili sistemi costituiti da un enorme numero di elementi caratterizzati da grande variabilità di forme ma di dimensioni microscopiche.

Volendo in conclusione comprendere ed imitare il funzionamento di un siffatto sistema, complesso, adattivo ed altamente non lineare, occorrerebbe non soltanto scrivere e risolvere un numero astronomico di equazioni accoppiate (ad esempio, un'equazione per la descrizione del funzionamento di ciascun neurone) ma, preventivamente, specificare in dettaglio la rete, il che alla luce dei dati neuroanatomici disponibili manifesta un'inaccettabile e insormontabile livello di incertezza a causa proprio della struttura del sistema di cui si dice.

Al fine di fornire un'idea delle difficoltà concettuali e tecniche che si incontrerebbero qualora si volesse pervenire ad una rigorosa descrizione della dinamica di una rete neuronale, riferiamoci alla classica schematizzazione secondo la quale il neurone viene riguardato come un elemento lineare a soglia, rappresentabile quindi mediante lo schema di Fig. 12. Si tratta dunque di un sistema che possiede un certo numero n di linee d'ingresso lungo le quali viaggiano i segnali X_1, X_2, \dots, X_n provenienti da altri neuroni della rete o dall'ambiente. Tali segnali, per effetto delle sinapsi S_1, S_2, \dots, S_n , vengono trasformati, previo un passaggio di natura biochimica sul quale sorvoliamo, nei segnali eccitatori o inibitori $a_1X_1, a_2X_2, \dots, a_nX_n$ che, agendo sul corpo cellulare, vengono sommati a costituire la stimolazione totale $E = \sum_{i=1}^n a_iX_i$. Se questa supera un valore minimo, caratteristico del neurone, detto "soglia di sparo", il neurone genera un segnale y che a sua volta perverrà attraverso l'assone e le diramazioni sinaptiche ad altri neuroni, possibilmente anche a sé stesso. Se invece la stimolazione totale è non superiore a detto valore di soglia, il neurone non produce alcun segnale in uscita. In termini formali, possiamo dunque rappresentare al seguente modo lo stato y del neurone a seguito delle stimolazioni X_i ricevute:

$$y = 1 \left[\sum_{i=1}^n a_iX_i - S \right],$$

dove $1(z)$ denota la funzione gradino unitario di Heaviside:

$$1(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

Con tale premessa, facciamo riferimento ad una rete di siffatti neuroni formali che, come suggerito in [14], rappresenteremo a titolo di esempio con lo schema di Fig. 13. In essa sono presenti quattro neuroni input, ossia d'ingresso alla rete, i_1, i_2, i_3, i_4 (denotanti possibilmente neuroni sensibili a stimolazioni provenienti dall'ambiente) e tre neuroni output, ovvero d'uscita, o_1, o_2, o_3 , rappresentanti ad esempio neuroni agenti sul sistema motorio dell'organismo. I segnali provenienti dai neuroni input generano le risposte dell'organismo consistenti nei segnali prodotti dai neuroni output attraverso la mediazione effettuata dai neuroni "centrali" (sette in Fig. 13). Nell'ipotesi pur semplificativa che la rete funzioni in maniera sincrona allo scandire di una successione di istanti $1, 2, \dots, n, \dots$ generati da un qualche orologio interno, la descrizione della dinamica della rete richiede la risoluzione del sistema, altamente non lineare, delle $N + n$ equazioni

$$u_k(p+1) = 1 \left[\sum_{h=1}^N a_{kh}u_h(p) + \sum_{h=1}^m b_{kh}i_h(p) - S_k \right] \quad (k = 1, \dots, N)$$

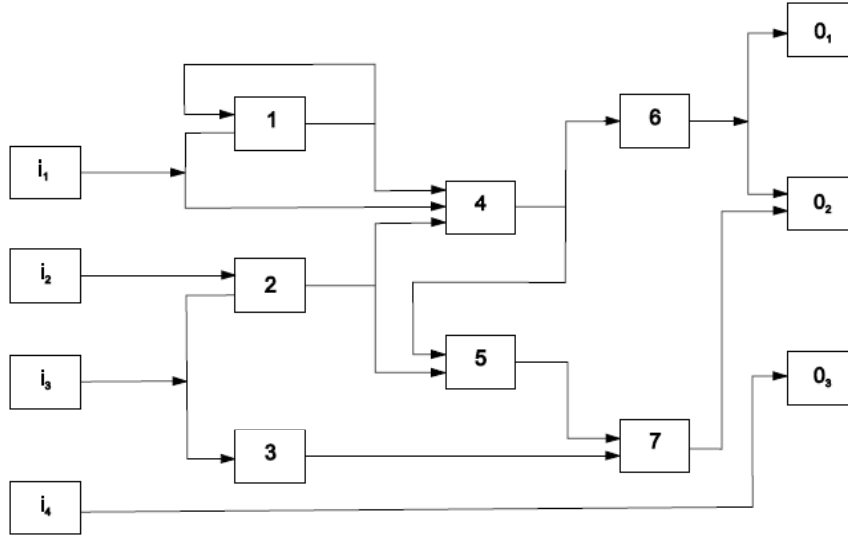


Figura 13: Un esempio di minuscola rete neuronale: gli i_k denotano i neuroni input, gli o_i i neuroni output, e i rimanenti sono i neuroni interni (o centrali).

$$o_k(p+1) = 1 \left[\sum_{h=1}^N c_{kh} u_h(p) + \sum_{h=1}^m d_{kh} i_h(p) - S'_k \right] \quad (k = 1, \dots, n)$$

scritto per il caso generale dei diversi tipi di neuroni: neuroni di ingresso (i_k), ($k = 1, 2, \dots, m$), neuroni interni (u_s), ($s = 1, 2, \dots, N$), e neuroni di uscita (o_l), ($l = 1, 2, \dots, n$), con i coefficienti di accoppiamento a_{kh} (neurone interno h - neurone interno k), b_{hk} (neurone interno h - neurone input k), c_{hk} (neurone output h - neurone centrale k) e d_{hk} (neurone output h - neurone input k). Ed è qui ben chiaro a che cosa si va incontro quando, realisticamente, la rete consti di centinaia di migliaia o di milioni di neuroni.

Per completezza, va fatto notare che se si volesse tener conto dell'effettiva scala temporale nella quale il tempo è scandito in multipli del "ritardo sinaptico" τ , con riferimento ad esempio ad una rete autonoma, ossia in assenza di neuroni input ed output, le equazioni di evoluzione della rete andrebbero realisticamente scritte nella forma seguente:

$$u_h(t + \tau) = 1 \left[\sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{l(h)} a_{hk}^{(r)} u_k(t - r\tau) - S_h \right] \quad (h = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N),$$

dove gli $a_{hk}^{(r)}$ sono i coefficienti di accoppiamento, in generale variabili nel tempo (onde poter tenere conto di fenomeni di "adattamento" o "apprendimento") e dove si è tenuto conto dei possibili ritardi con i quali le stimolazioni pervengono ai neuroni a causa delle diverse lunghezze dei percorsi compiuti dai segnali. Le equazioni prima

scritte corrispondono dunque alle ipotesi semplificative di “approssimazione adiabatica” ($a_{hk}^{(r)} = a_{hk}$) e tempi di percorrenza nulli (velocità di trasmissione dei segnali tanto elevata da potersi considerare infinita), in presenza del solo ritardo sinaptico τ .

Tralasciando ulteriori considerazioni sull’incertezza di origine strutturale cui si è accennato, una breve digressione è d’uopo su alcuni altri aspetti fondamentalmente non strutturali ma di carattere dinamico che certo contribuiscono ad innalzare ulteriormente il già tanto elevato livello di incertezza di cui si è detto. Invero, i sistemi nervosi sono esempi mirabili di strutture ipercomplesse caratterizzate da dinamiche collettive nelle quali, anche ai livelli più primitivi, si riscontrano interazioni di natura sensoriale-motrice. Quanto più poi si sale nella scala filogenetica, tanto più ci si imbatte in aggregati e regioni cellulari sintonizzate su circoscritte funzioni che devono intervenire dinamicamente in maniera collettiva al fine di preservare l’identità, ossia l’*unicum*, dell’organismo. Pur esistendo talune caratteristiche universali dei sistemi nervosi, specie diverse hanno sviluppato soluzioni diverse meglio adattate alle proprie nicchie ecologiche. Il sistema nervoso, ed in particolare la sua parte essenziale, ossia il cervello, è un prototipo di sistema caratterizzato da dinamiche collettive. Cooperazione e competizione esistenti a livelli diversi dell’organizzazione neuronale (dal livello molecolare passando attraverso neuroni, sinapsi, reti neurali, centri di controllo) costituiscono le fondamentali caratteristiche della dinamica dei cervelli. Attraverso lo studio di aspetti di dinamica collettiva dell’attività spazio-temporale di neuroni singoli, reti e sistemi neurali, e del loro ruolo nell’elaborazione dell’informazione neurale, si spera di pervenire prima o poi alla comprensione non soltanto delle normali operazioni di specifici sistemi neurali, ma anche alla formulazione di nuovi e migliori modelli matematici di disordini neurologici e psichiatrici, nonché di modelli che favoriscano lo sviluppo di scienze computazionali e robotica ispirate proprio dal funzionamento dei cervelli.

In sintesi, un cervello va riguardato come organizzato in successivi livelli gerarchici che vanno dal microscopico (molecole, recettori, canali ionici, sinapsi) al macroscopico (nuclei, aree corticali, reti neuronali). Quali inferenze sia possibile effettuare nel passaggio “top-down” da un livello al successivo, ossia muovendosi dal macroscopico verso il microscopico, ovvero dal passaggio “bottom-up”, ossia dal microscopico al macroscopico, costituisce una domanda di fondamentale importanza nello studio non solo dei cervelli ma in generale di tutti i sistemi biologici complessi.

Va qui sottolineato come qualsiasi comportamento umano, ivi incluse attività di pensiero, azioni generiche o finalizzate a compiti specifici, nonché ogni stato mentale sono il risultato del funzionamento del cervello, ossia, in ultima analisi, di un sistema dinamico complesso, adattivo ed altamente non lineare. Secondo Chialvo [11], mentre nuove affascinanti scoperte sulla fisiologia del cervello avvengono con grande frequenza, molto raramente vengono sollevate domande in merito a come questi nuovi elementi conoscitivi possono venire integrati per comprendere come il cervello funziona. Invero, informazioni su larga scala concernenti i sistemi nervosi riguardano essenzialmente aspetti psicologici, raramente complementati da discussione sui meccanismi sottostanti. Sarebbe invece auspicabile che, come avviene nell’ambito delle discipline fisiche, i fenomeni a carattere macroscopico venissero spiegati a partire dalle dinamiche microscopiche che li sottendono. Ma se il compito di comprendere come una collettività

di numerosi sistemi interagenti è di per sé generalmente molto complicato, ancora di più lo è nel caso del cervello presentandosi infatti in tal caso richieste in mutuo conflitto: talora la necessità di integrazione nel funzionamento, talaltra di “segregazione”. Si tratta di una specifica di funzionamento tutt’altro che banale, eppure perfettamente assoluta come attestato da ampia fenomenologia neurobiologica. Probabilmente ad Ashby [1] va attribuito il merito di aver intuito per primo quanto fondamentale sia il comprendere come l’autorganizzazione sia elemento essenziale per la progressiva realizzazione delle funzioni cerebrali. È questo un capitolo riguardante la dinamica dei cervelli su larga scala, riguardato dalla comunità dei neurobiologi certamente come interessante ma ancora troppo lontano per fruttuosi tentativi di studio, a differenza di quanto concerne neuroni, sinapsi e canali ionici. Se tuttavia è vero che proprietà microscopiche dei cervelli possono perfettamente comprendersi senza conoscenze su comportamenti globali di larga scala, è anche indubabilmente vero che nulla di ciò che si è appreso su scala microscopica può far comprendere il funzionamento del cervello riguardato come un tutt’uno.

In conclusione, le considerazioni svolte sottolineano come così elevati gradi di complessità e variabilità caratterizzanti i sistemi nervosi, lungi dal costituire ostacoli per il loro corretto funzionamento, ne siano in realtà elementi fondanti ed imprescindibili anche alla luce delle continue trasformazioni (e quotidiane depauperazioni) cui questi sistemi sono inevitabilmente soggetti. Livelli di indeterminazione e presenza di perturbazioni anche a carattere accidentale (“rumore” endogeno oppure esogeno, ossia dovuto all’interazione del sistema con l’ambiente nel quale opera) costituiscono in ultima analisi un indispensabile volano atto a consentire flessibilità di funzionamento e resistenza dei cervelli avverso interazioni potenzialmente dannose o fuorvianti. Nell’uso proficuo ed efficace di tali caratteristiche di incertezza a variabilità affondano radici quelle sinergie multidisciplinari miranti alla comprensione di proprietà riposte ma essenziali dei sistemi nervosi.

4.2. Muscoli

La seconda situazione cui si desidera far qui riferimento, nella quale l’incertezza nasce dalla complessità delle strutture coinvolte e dalle proprietà del mezzo nel quale esse sono immerse ed operano, è offerta dallo studio del fenomeno della contrazione muscolare, alla base della locomozione di gran parte degli organismi viventi. Le Figg. 14 e 15 mostrano schematicamente i livelli dell’organizzazione strutturale in un tipico muscolo scheletrico, nonché l’innervazione di alcune fibre muscolari per mezzo di un singolo motoneurone.

In realtà, la capacità di muoversi è una caratteristica non soltanto degli organismi nella loro interezza, ma è comune anche a tutte le cellule. Attraverso i processi di evoluzione si è creata una notevole varietà di proteine in grado di generare forze e moto. Proprio in ciò consiste la funzione principale dei motori proteici, essenziali per la vita: senza di essi tutti i trasporti cellulari si arresterebbero conducendo così inevitabilmente ogni organismo alla morte. Tali proteine possono riguardarsi come micromotori che utilizzano energia chimica prodotta da una “molecole carburante” (Adenosina Tri-

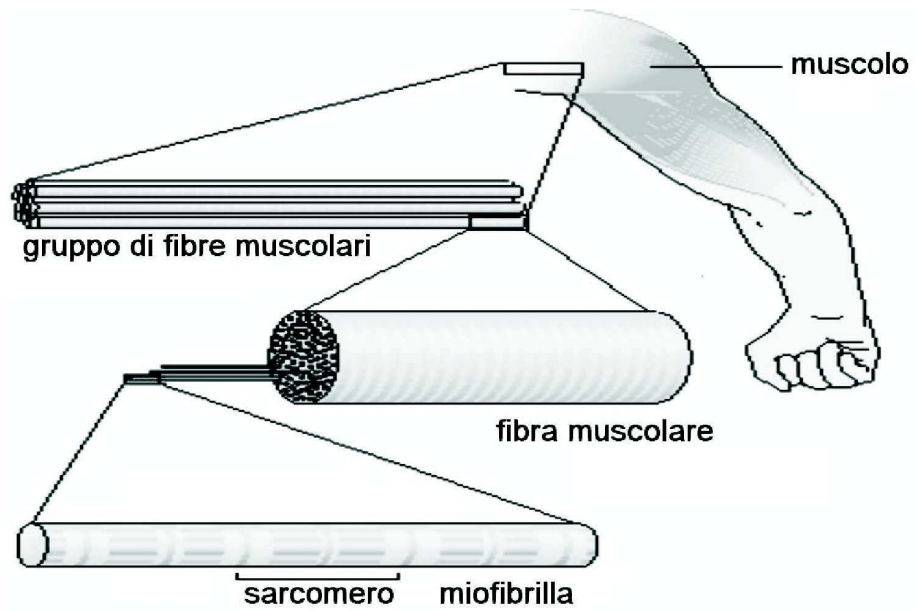


Figura 14: Dettagli di un muscolo.

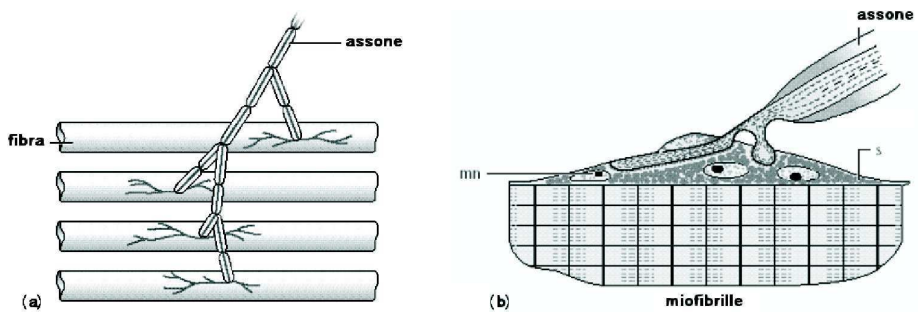


Figura 15: Innervazione di fibre muscolari da parte di un motoneurone.

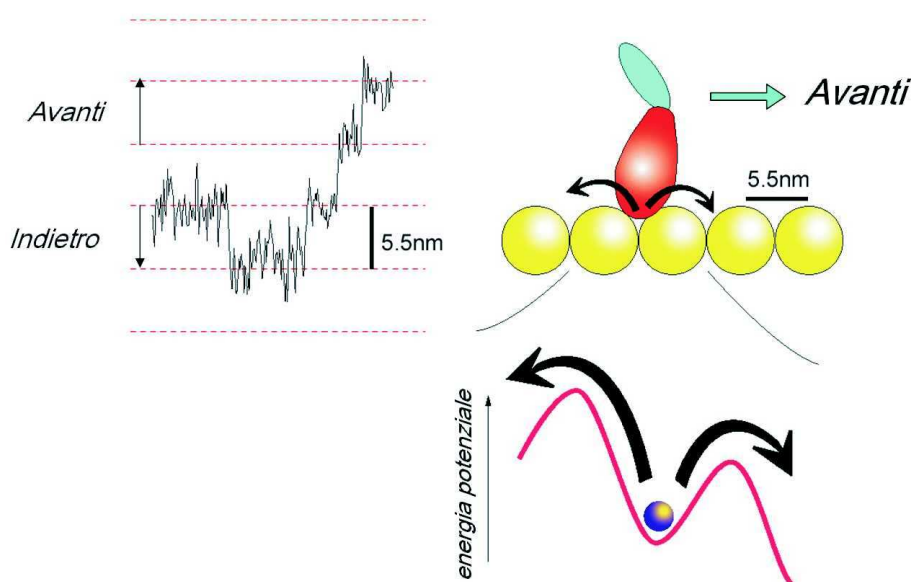


Figura 16: Regrazioni di traiettorie e schematiche indicazioni del moto di una singola testina di miosina in un ipotetico potenziale inclinato.

fosfato, o brevemente, ATP) per produrre lavoro meccanico. Tali motori si classificano in lineari (miosine, kinesine, dineine) o rotatori (motori flagellari nei batteri, ATPase). I motori lineari comportano scorrimenti lungo filamenti specifici in direzioni specifiche e intervengono nella contrazione muscolare e nel trasporto di materiali in cellule, mediante idrolizzazione di ATP con conseguente trasferimento di energia a seguito di rilascio di anioni fosforo. Le considerazioni che seguono si riferiscono alla Miosina II, appartenente alla cosiddetta famiglia delle miosine, con qualche dettaglio sulle modalità con cui queste proteine trasformano energia chimica fornita dall'ATP in forza, moto e lavoro meccanico. In questo caso si parla di "macchine a scivolamento". In breve, tali macchine trasformano il flusso in entrata, costituito da energia chimica libera e da molecole di ATP idrolizzate, in flusso di uscita sotto forma di forza necessaria per determinare lo scivolamento. I principali interrogativi che emergono in siffatti contesti sono: (a) l'input e l'output di queste macchine molecolari utilizzate dalle cellule viventi sono accoppiati in maniera rigida?, e (b) una reazione chimica in input genera sempre una unità di movimento meccanico in output?

L'incertezza a priori concernente la risposta a tali interrogativi trova la propria origine proprio dal contesto nel quale i motori molecolari operano: spostamenti, energie e tempi rispettivamente dell'ordine di nanometri, piconewton e millisecondi. In maniera sintetica, possiamo dire che lo scivolamento complessivo avviene per passi (step) successivi, come schematicamente indicato nella parte alta della Fig. 16. La lunghezza di uno step, all'incirca costante, è pari alla distanza (5.5 nm) tra due mono-



Figura 17: Il Prof. Fumio Oosawa.

meri consecutivi di actina. In condizioni di basso carico applicato ad un'estremità della miosina, consistente in una caratteristica "testina", la maggioranza degli step avviene in uno stesso verso (in avanti, o "forward") e solo una piccola frazione di essi (circa 10%) si verifica in verso opposto (all'indietro, o "backward"). Va detto che la relazione tra input ed output potrebbe non essere così diretta. Alcuni processi intermedi potrebbero far sì che il legame tra essi rientri in una teoria di accoppiamento debole (loose coupling). Secondo il Prof. Fumio Oosawa (v. Fig. 17), principale e primo sostenitore della teoria dell'accoppiamento debole e responsabile delle prime osservazioni sperimentali del moto bidirezionale della miosina, l'energia libera a disposizione non è molto maggiore dell'energia $k_B T \sim 4$ pN nm del bagno termico nel quale il fenomeno di scivolamento avviene. Il motore, infatti, lavora in acqua a temperatura ambiente e le sue unità strutturali non sono rigide, ma sensibili alle fluttuazioni termiche.

Sembra, invero, che le cellule viventi abbiano escogitato un processo adatto a convertire in movimento in maniera efficiente piccole quantità di energia chimica attraverso un meccanismo che imbriglia in modo fruttuoso le forze originate dall'agitazione termica. È questo, dunque, un altro caso nel quale l'effetto del "rumore" dovuto all'agitazione termica delle molecole del liquido nel quale il processo di scivolamento deve aver luogo, lungi dal costituire un elemento di contrasto o di indeterminazione della dinamica del processo, ne facilita la realizzazione fornendo ulteriore carburante e determinando la spiccata direzionalità.



Swimming Against the tide

Toshio Yanagida rejects the conventional biophysical explanation of muscle contraction. No one doubts his technical genius, but could the debate he started ultimately hold back the field? David Cyranoski investigates.

Figura 18: Frontespizio di *Nature*, Vol. 408, pp. 764-766, (2000). In primo piano il Prof. Toshio Yanagida.

La conferma definitiva della bidirezionalità del moto è una scoperta molto recente dovuta al Prof. Toshio Yanagida dell'Università di Osaka. Come spesso accade quando si propongono teorie, schemi o dati inconsueti, contrastanti le convinzioni storicamente sancite, la dimostrata non unidirezionalità del moto fu riguardata con grande scetticismo anche in comunità di alto rilievo, per essere definitivamente accolta nel mondo scientifico soltanto dopo qualche tempo. L'incertezza con la quale vennero da più, molto qualificate, parti considerati questi risultati fu fondamentalmente dovuta all'estrema complessità dei necessari apparati di misura, quasi tutti da costruirsi "in casa", nonché alla necessità di lunghi periodi di addestramento richiesti ai tecnici preposti alle misurazioni, condizioni entrambe molto scoraggianti. La svolta definitiva ebbe luogo a seguito della comparsa di un articolo sulla rivista *Nature* ([13]) la cui copertina ritrae lo stesso Yanagida accanto alla dicitura "Nuotando contro corrente" (vedi Fig. 18). Da quel momento caddero progressivamente indugi e pregiudizi per lasciare il passo, come è giusto che sia, ad una sana, seppur molto accesa, diatriba scientifica svoltasi a colpi di articoli sulle più prestigiose riviste internazionali, ed anche, sommessamente suggerisco, in virtù di un programma di ricerca congiunta sancito da un protocollo di collaborazione internazionale tra la Japan Science and Technology Corporation (attualmente inglobata nella Japan Science and Technology Agency) e l'Università di

Napoli Federico II (v. http://www.jst.go.jp/icorp/english/past_proj/single-e.html) con colui che scrive in qualità di responsabile scientifico per parte italiana.

L'estremo livello di incertezza associato al funzionamento di strutture così complesse, dovuto anche al contesto fisico nel quale questi meccanismi operano, viene ulteriormente esaltato quando si pensi che operazioni macroscopicamente semplicissime a noi ben familiari sono, in realtà, il risultato di miriadi di meccanismi concomitaneamente e cooperativamente agenti. Basti pensare che per generare la forza di 10 Newton, necessaria per sostenere un oggetto di 1 chilogrammo, sono richiesti ben dieci trilioni di simultanei processi di slittamento di testine di miosina lungo i corrispondenti filamenti di actina. Ciò manifesta chiaramente la complessità della struttura e dei relativi meccanismi quando azioni a tutti ben familiari, quali atti di pensiero o movimenti meccanici, vengono posti in relazione con i fenomeni microscopici che in ultima analisi li determinano.

Nel programma di ricerca congiunto cui si è accennato, punto di partenza consistette nell'ipotizzare che un effetto *ratchet* ^{||} di qualche natura da specificarsi successivamente fosse responsabile della direzionalità manifestata dal moto pur in presenza della caotica, assolutamente adirezionale agitazione termica. ^{**} In ultima analisi, quale si vuole sia tale effetto ratchet, esso dovrebbe produrre una forza F , dipendente dal carico cui è soggetto il motore durante il proprio funzionamento, il cui ruolo consiste nell'inclinare il potenziale continuo L -periodico (v. anche Fig. 16), diciamolo $U(x)$, che è determinato da tutte le forze conservative agenti sulla testina di miosina. L'idea è consistita, pertanto, nel rappresentare lo scivolamento della miosina sull'actina alla guisa del moto lungo un asse di una particella immersa in un fluido altamente viscoso, che sinteticamente chiameremo "motore browniano". Sotto ragionevoli ipotesi, confortate da considerazioni fisiche e dimensionali, detta x la posizione occupata dalla particella su tale asse, si perviene alla seguente equazione del moto:

$$(49) \quad \dot{x} = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{dx} [U(x) - Fx] + \sqrt{2 \frac{k_B T}{\beta}} \Lambda(t).$$

In [4] tale ipotesi di lavoro fu testata assumendo $U(x)$ di tipo parabolico e in condizioni di carico nullo. In [5] l'indagine fu ampliata considerando diversi altri profili per il potenziale e prendendo in considerazione l'effetto di un carico non nullo. L'obiettivo era quello di adattare i parametri dei corrispondenti modelli in maniera da ottenere un sostanziale accordo tra dati sperimentali e valutazioni teoriche in relazione ad alcune quantità caratteristiche del motore e particolarmente significative nel contesto considerato. Tale fu in conclusione il risultato. Non sussistendo dunque contraddizione con l'ipotesi effettuata di potenziale inclinato, il passo successivo consisté nel proporre prototipi di meccanismi atti a produrre il necessario effetto ratchet. Il primo di essi,

^{||}Con tale termine si intende qui riferirsi ad un qualsiasi generico meccanismo in grado di alternare una fase nella quale uno specificato grado di libertà del sistema in considerazione è confinato nell'intorno di un certo stato con una fase nella quale tale grado di libertà può assumere valori in un maggiormente ampio range.

^{**}Una precisazione fisico-matematica della nozione di agitazione termica è contenuta in un seminale lavoro di Norbert Wiener (v. [23]).

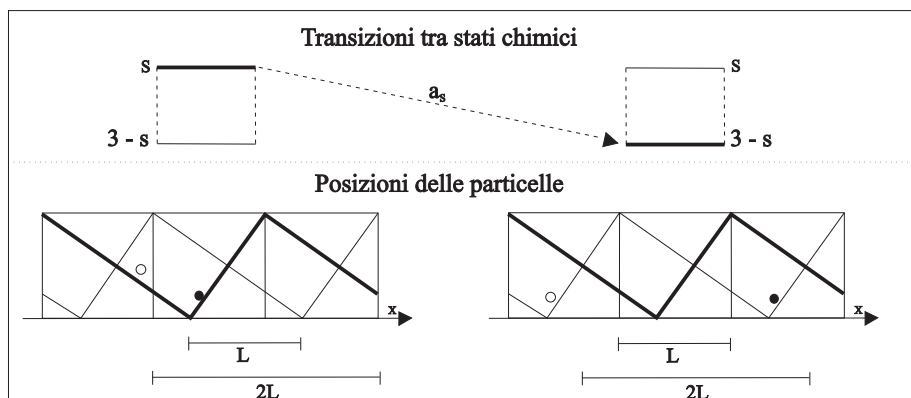


Figura 19: Rappresentazione schematica del motore browniano. Nella parte superiore è rappresentata una transizione di stato collegata ad una reazione chimica, e nella parte inferiore il corrispondente potenziale (ad una sola buca) attivato e i conseguenti spostamenti delle particelle rappresentate rispettivamente da biglia nera e biglia bianca. Queste eseguono rispettivamente un passo in avanti e un passo all'indietro.

presentato in [21], fu basato sull'alternanza in tempi esponenziali di tre potenziali tutti aventi profilo "dente di sega" ma diverse profondità accoppiati al ciclo chimico dell'idrolisi della molecola di ATP. Dopo aver rilevato la sostanziale ininfluenza di uno di tali potenziali, ed averlo quindi rimosso, il modello proposto assume le sembianze di un ratchet fluttuante di tipo "alto-basso", ossia operante tra due livelli di potenziale uno dei quali notevolmente maggiore dell'altro. Tale motore presenta tuttavia alcuni inconvenienti il più rilevante dei quali consiste nella eccessivamente modesta forza sviluppata. Successivamente, in [6] è stata utilizzata l'idea della presenza di un cosiddetto potenziale viaggiante proposta per la prima volta in [10], in aggiunta ad un da noi postulato raddoppio del periodo del potenziale. In conseguenza di tale ipotizzato meccanismo, il motore, oltre a rispettare nel proprio funzionamento i dati sperimentali concernenti la durata media del tempo intercorrente tra due successivi passi e la proporzione dei passi in avanti rispetto a quelli all'indietro, presenta la notevole proprietà di sopportare anche carichi dell'ordine di vari piconewton.^{††} Come mostra la Fig. 20, in tale modello il motore riesce a funzionare in maniera pressoché invariata anche in presenza di notevoli carichi contrastanti sino a valori superiori a 6 piconewton. Permane tuttavia l'inconveniente che esso utilizza una quantità di energia (per un'unità di tempo) che è senza dubbio molto maggiore di quella a disposizione della testina di miosina conseguente all'idrolisi della molecola di ATP. Per ovviare a ciò, in [7], mantenendo l'ipotesi di presenza del potenziale viaggiante, fu postulata l'esistenza di una buca in ogni suo semiperiodo, come rappresentato in Fig. 21.

Regolando in maniera opportuna le profondità di tali buche si riesce a perve-

^{††}È suggestivo immaginare che un siffatto meccanismo, fenomenologicamente ipotizzato nel presente contesto biologico, trovi analogie e riscontri in futuri artefatti tecnologici.

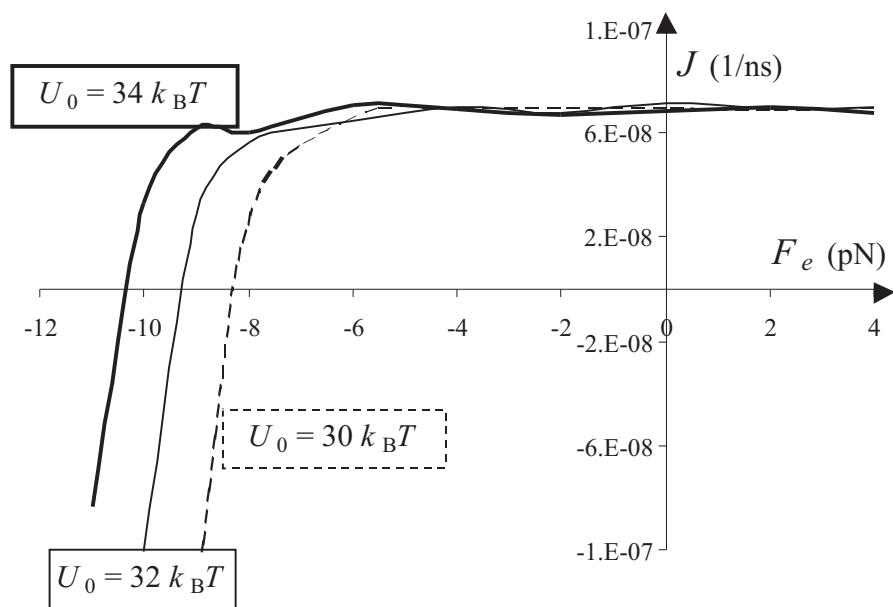


Figura 20: La figura indica il flusso totale J , rappresentativo in ultima analisi della velocità media delle particelle, in funzione del carico F_e in corrispondenza dei tre valori indicati per la profondità U_0 della buca del potenziale viaggiante.

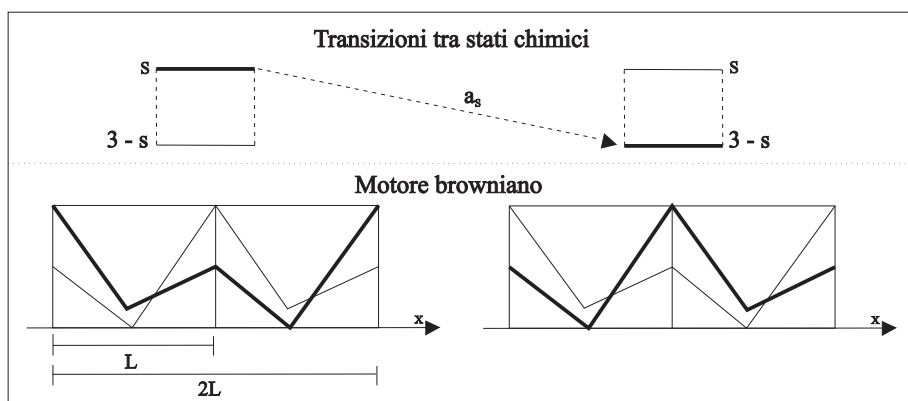


Figura 21: Schema del motore browniano a doppia buca di potenziale. In alto sono indicate le transizioni di stato indotte dalle reazioni chimiche. In basso è rappresentato il corrispondente potenziale a doppia buca attivo (linea spessa) nell'istante di osservazione.

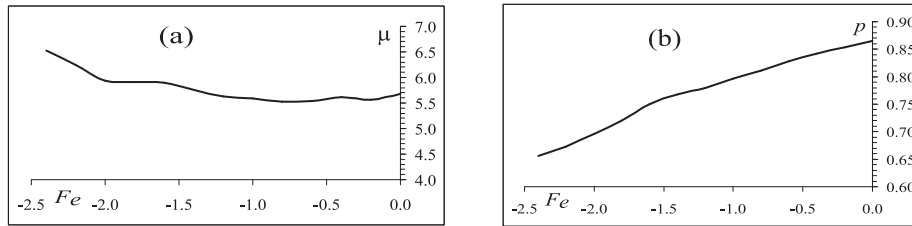


Figura 22: Grafici del tempo medio per ottenere un passo (ms) (a) e della probabilità dei passi in avanti (b) in funzione di F_e in pN per specificati valori dei parametri coinvolti.

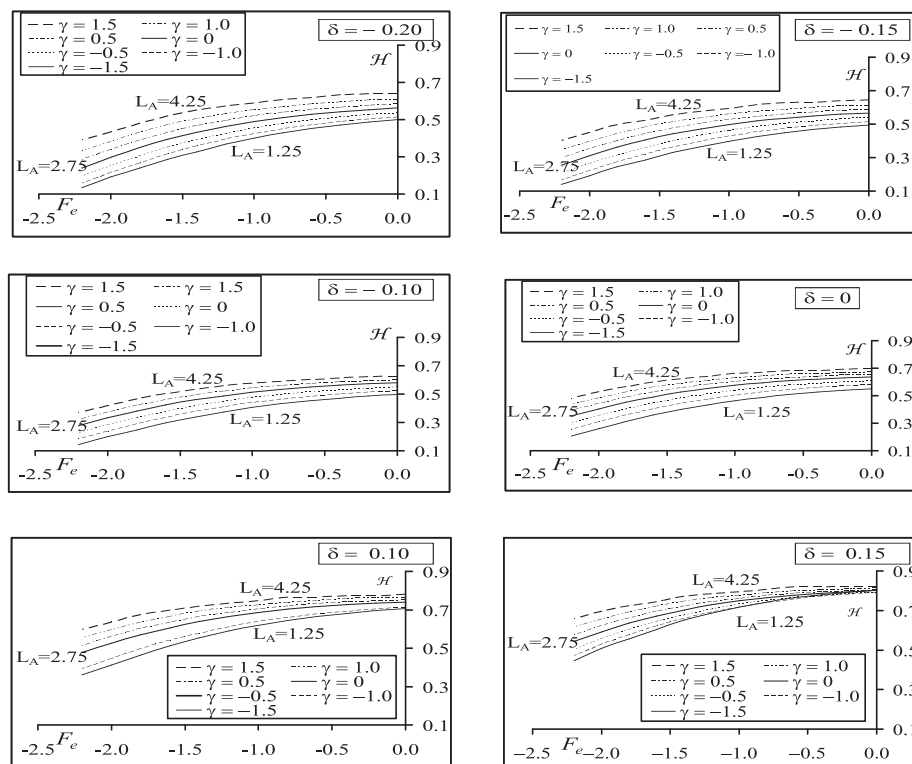


Figura 23: Il consumo di energia \mathcal{H} per ms in funzione del carico F_e ed in relazione ai parametri che localizzano le buche del potenziale viaggiante, ossia la distanza γ della prima buca dal punto di ascissa $L/2$ e la distanza δ tra le buche dei due potenziali situate nei primi semiperiodi.

nire ad un motore che sostanzialmente appare essere in eccellente accordo sia con le quantità meccaniche rilevanti (v. Fig. 22), sia sotto il profilo energetico (v. Fig. 23). In sintesi, la Fig. 22 mostra che il tempo medio perché il motore muova un passo e

la probabilità che tale passo avvenga in avanti sono in eccellente accordo con i dati sperimentali (v. [5]). Dalla ispezione dei grafici riportati in Fig. 23 risulta poi evidente che in ogni caso i consumi di energia per millisecondo sono inferiori ad una unità dell'energia $k_B T$ del bagno termico.

Per le caratterizzazioni quantitative analitiche e computazionali si rimanda a [8].

In conclusione, si è così dimostrato come previsioni estremamente accurate sulle caratteristiche del moto del sistema actina-miosina sono possibili ad onta dell'elevatissimo livello di incertezza strutturale e dinamica. Si è in particolare mostrato come del caotico moto browniano sia possibile fare uso proficuo per costruire efficienti ed affidabili motori molecolari nei quali elementi di elevata incertezza e situazioni di natura strettamente probabilistica non solo non ostano ma, invero, sinergicamente cooperano alla complessiva funzionalità della struttura.

Riferimenti bibliografici

- [1] ASHBY W.R., *Principles of the self-organizing system*, in: "Principles of self-organization", Transactions of the University of Illinois Symposium (Eds. Von Foerster H. and Zopf Jr G.W.), Pergamon Press, London 1962, 255–278.
- [2] BROWN R., *The Philosophical magazine and annals of philosophy*, (1828).
- [3] BUONOCORE A., NOBILE A.G. AND RICCIARDI L.M., *A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities*, Adv. Appl. Probab. **19** (1987), 784–800.
- [4] BUONOCORE A. AND RICCIARDI L.M., *Exploiting thermal noise for an efficient actomyosin sliding mechanism*, Mathematical Biosciences **182** (2003), 135–149.
- [5] BUONOCORE A., CAPUTO L., PIROZZI E. AND RICCIARDI L.M., *On myosin II dynamics: from a pulsating ratchet to a washboard potential*, LNCS **3643** (2005), 426–435.
- [6] BUONOCORE A., CAPUTO L., ISHII Y., PIROZZI E., YANAGIDA T. AND RICCIARDI L.M., *On Myosin II dynamics in the presence of external loads*, Biosystems **81** (2005), 165–177.
- [7] BUONOCORE A., CAPUTO L., PIROZZI E. AND RICCIARDI L.M., *Simulation of Myosin II dynamics modeled by a pulsating ratchet with double-well potentials*, LNCS **4739** (2007), 154–162.
- [8] BUONOCORE A., CAPUTO L., PIROZZI E. AND RICCIARDI L.M., *On a pulsating Brownian motor and its characterization*, Mathematical Biosciences **207** (2007), 387–401.
- [9] CAPOCELLI R.M. AND RICCIARDI L.M., *On the transformation of diffusion processes into the Feller process*, Mathematical Biosciences **29** (1976), 219–234.
- [10] CHAUWIN J.F., AJDARI A. AND PROST J., *Force-free motion in asymmetric structures: a mechanism without diffusive steps*, Europhys. Lett. **27** (1994), 421–426.
- [11] CHIALVO D.R., BALENZUELA P. AND FRAIMAN D., *The brain: what is critical about it?*, in: "Collective Dynamics: Topics on Competition and Cooperation in the Biosciences", American Institute of Physics Conference Proceedings, **1028** (2008), 28–45.
- [12] CULL P., FLAHLIVE M. AND ROBSON R., *Difference equations. From rabbits to chaos*, Springer, New York (2005).
- [13] CYRANOSKI D., *Swimming against the tide*, Nature **408** (2000), 764–766.
- [14] DE LUCA A. AND RICCIARDI L.M., *Introduzione alla cibernetica*, Franco Angeli Editore 1971.
- [15] ERDÉLYI (Editor), MAGNUS W., OBERHETTINGER F. AND TRICOMI F.G. (Research Associates), *Tables of integral transforms*, Vol. 1, 2 (1954); *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, 2 (1953), Vol. 3 (1955), McGraw-Hill Book Company.
- [16] FORTET R., *Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. Pures Appl. **22** (1943), 177–243.

- [17] GIORNO V., NOBILE A. G. AND RICCIARDI L.M., *On some algorithmic and computational problems for neuronal diffusion models*, LNCS **763** (1993), 293–313.
- [18] METROPOLIS N.C., REITWIESNER G. AND VON NEUMANN J., *Statistical treatment of (the) values of (the) first 2000 decimal digits of e and π calculated on the ENIAC*, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* **4** (1950), 109–111.
- [19] RICCIARDI L.M., *On the transformation of diffusion processes into the Wiener process*, *J. Math. Analysis Appl.* **54** (1976), 185–199.
- [20] RICCIARDI L.M., DI CRESCENZO A., GIORNO V. AND NOBILE A.G., *An outline of theoretical and algorithmic approaches to first passage time problems with applications to biological modeling*, *Math. Jap.* **50** (1999), 247–322.
- [21] SHIMOKAWA T., SATO S., BUONOCORE A. AND RICCIARDI L.M., *A chemically driven fluctuating ratchet model for actomyosin interaction*, *BioSystems* **71** (2005), 179–187.
- [22] TRICOMI F.G., *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Cremonese, Roma 1955.
- [23] WIENER N., *The homogeneous chaos*, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 897–936.

AMS Subject Classification: 00A99, 92-01.

Luigi M. RICCIARDI, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II, Via Cintia, Monte S. Angelo I-80126 Napoli, ITALIA
e-mail: luigi.ricciardi@unina.it