

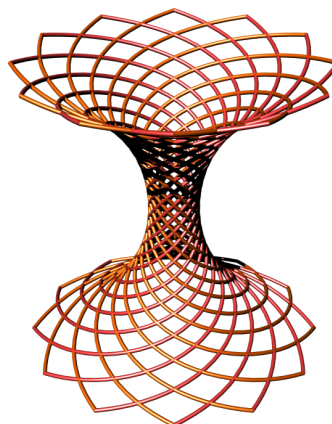
R. Caddeo - P. Piu

**ELICHE SU SUPERFICI DI ROTAZIONE:
VECCHIE E NUOVE ¹**

Dedicato alla Professoressa Anna Maria Pastore

1. Introduzione

Come è ben noto, nello spazio ordinario \mathbb{R}^3 , dopo i meridiani, i paralleli, le lossodromiche e le geodetiche, le curve notevoli probabilmente più interessanti di una superficie di rotazione sono le eliche. Curve di grande utilità e non prive di un certo fascino, come si può constatare osservando la struttura dell'*Albero della vita* scelto a simbolo dell'Expo 2015 di Milano. Il modello geometrico a lato è stato realizzato (in collaborazione con Gregorio Franzoni) tracciando due famiglie di curve asintotiche su un catenoide.



Storicamente, a nostra conoscenza, i primi studi sistematici, in senso moderno, delle eliche su superfici di rotazione risalgono alla fine del 1800 e si devono principalmente a Geminiano Pirondini (a Parma), a Gino Loria (a Genova, costretto al ritiro nel 1935 per le leggi razziali), e a Erich Salkowski (a Charlottenburg, attualmente un quartiere di Berlino). Più di recente, nel 1939, James K. Whittemore (a Harvard), partendo dalle *Lezioni* di Luigi Bianchi [3], ma apparentemente all'oscuro dei risultati precedenti, si cimenta nell'indagine sulle eliche delle superfici di rotazione, nell'intento di ricavare una loro parametrizzazione esplicita almeno su alcune quadriche.

In questi ultimi anni ci siamo imbattuti a più riprese in ambito riemanniano in eliche cilindriche sia nello studio delle geodetiche, sia nella determinazione delle curve biarmoniche nel senso di Eells e Sampson [10]. Esistono infatti, oltre a \mathbb{R}^3 , altre varietà riemanniane tridimensionali in ogni punto delle quali c'è un asse attorno al quale si possono costruire superfici di rotazione, spazi che L. Bianchi in [4] annovera tra quelli

¹Lavoro svolto nell'ambito del GNSAGA dell'INdAM e del P.R.I.N. 2010/11 - Varietà reali e complesse: geometria, topologia e analisi armonica - MIUR Italia.

sistatici. Tra questi c'è anche \mathbb{H}_3 , il gruppo di Heisenberg, munito della metrica

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(dz - \frac{1}{2}x dy + \frac{1}{2}y dx \right)^2.$$

In [2] M. Bekkar e T. Sari hanno dato esplicitamente il suo gruppo delle isometrie, nella forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \frac{-b \cos \vartheta + a \sin \vartheta}{2} & \frac{b \sin \vartheta + a \cos \vartheta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - \frac{ab}{2} \end{pmatrix} \quad \vartheta, a, b, c \in \mathbb{R},$$

nella quale si vede subito che tale gruppo contiene il sottogruppo delle rotazioni attorno all'asse z .

Come vedremo nel § 4, anche in questi spazi appaiono eliche cilindriche sia nello studio delle geodetiche, sia nella determinazione delle curve che sono biarmoniche nel senso di Eells e Sampson ([10]).

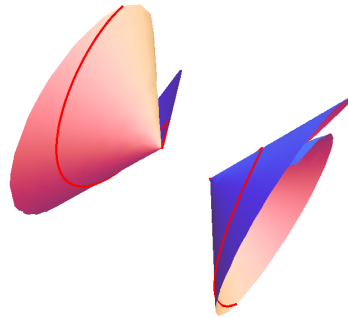
Nei primi paragrafi richiameremo brevemente i momenti salienti - noti, ma forse non proprio ben noti - della evoluzione dello studio e della ricerca delle eliche delle superfici di rotazione in \mathbb{R}^3 , per mettere in evidenza i principali contributi, dai primi di G. Pirondini ([16]), di G. Loria ([14]) e di E. Salkowski ([21]), sino a quello ([24]) di J.K. Whittemore. Grazie a quest'ultimo potremo rappresentare graficamente alcune delle eliche trovate.

2. Eliche: primi studi sulle superfici di rotazione e generalizzazioni

La famiglia delle eliche dello spazio ordinario può essere ampliata accettando tra i suoi membri, oltre alle eliche cilindriche a forma di molla aventi curvatura e torsione costanti, anche quelle che formano un angolo costante con una direzione fissata. Che questa generalizzazione sia ragionevole appare chiaro per via di un risultato classico, annunciato da M.A. Lancret nel 1802 e dimostrato da B. de Saint Venant nel 1845 (si veda [22], §§ 1-9, per i dettagli) che afferma: *condizione necessaria e sufficiente affinché una curva sia un'elica generalizzata è che il rapporto tra curvatura e torsione sia costante*.

Poiché tutte le eliche cilindriche verificano l'equazione $\kappa/\tau = \text{costante}$, si possono cercare quelle fra esse che soddisfano a una ulteriore condizione, per esempio a quella di appartenere anche ad una assegnata superficie di rotazione attorno a un asse parallelo alle generatrici del cilindro sul quale si trova l'elica. Fu A. Enneper nel 1866 a porre il problema di determinare curve che siano traiettorie oblique sia rispetto alle generatrici di un cono che a quelle di un cilindro. La questione venne da lui stesso risolta nel 1882 in [11]. In seguito G. Pirondini in [16] studiò diversi casi, in particolare le curve che sono eliche di due coni, e dedusse che:

- se si sviluppa su un piano il cilindro che proietta l'elica biconica parallelamente alla congiungente i vertici, la curva diviene una cicloide;
- se si fa ruotare l'elica attorno alla congiungente i vertici dei due coni si ottiene una superficie di quart'ordine; quindi l'elica, benché trascendente, appartiene ad una superficie algebrica.



In precedenza, nel 1878, E. Catalan aveva studiato l'*elica catenoidica* $(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$, mostrando che la sua proiezione su un piano è un'iperbole equilatera. Nel 1925 G. Loria presenta in [14] i risultati a lui noti, ottenuti applicando metodi classici della geometria analitica allo studio delle eliche su superfici di rotazione. In alcuni paragrafi vengono descritte le eliche delle quadriche di rotazione partendo dalla curva che l'elica proietta su un piano perpendicolare all'asse di rotazione. Tale descrizione consente di rappresentare le eliche su alcune quadriche:

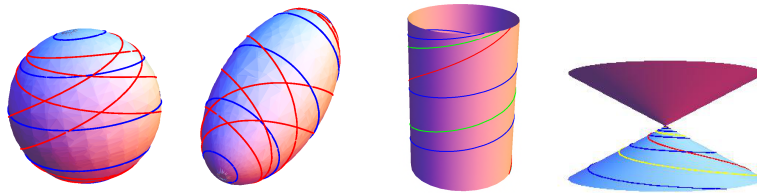


Figura 1: Alcune eliche della sfera, dell'ellissoide, del cilindro e del cono.

La nozione di elica generalizzata di \mathbb{R}^3 può essere estesa in diversi modi. In [20] viene considerata la stessa definizione in \mathbb{R}^n , con $n > 3$. In [12] Hayden si trasferisce in ambito riemanniano definendo elica generalizzata una curva per la quale un campo vettoriale lungo essa, parallelo secondo Levi-Civita, forma angoli costanti con tutti i vettori del riferimento di Frenet. Questa definizione è piuttosto restrittiva e consente di trovare "eliche solo nel caso in cui la dimensione n sia dispari. Inoltre, negli stessi articoli, viene generalizzato il teorema di Lancret dimostrando che la definizione è equivalente al fatto che i rapporti $\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \dots$, tra le curvatures k_i della curva, in numero pari, sono costanti. In [15] Monterde studia le curve di \mathbb{R}^n per le quali tutti i rapporti $\frac{k_{i+1}}{k_i}$ tra le curvatures sono costanti. In [1] l'autore propone un'altra definizione di elica generalizzata su uno spazio tridimensionale M a curvatura costante sostituendo la direzione fissa che appare nella usuale definizione di elica con un campo vettoriale di Killing ξ definito lungo la curva: una curva $\gamma(s)$ in M è un'elica generalizzata se esiste, lungo γ , un campo di Killing $\xi(s)$ di lunghezza costante che forma con γ' un angolo costante e diverso da zero. Un modello di elica in $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ è dato da

$$\gamma(t) = (\cos \varphi \cos at, \cos \varphi \sin at, \sin \varphi \cos bt, \sin \varphi \sin bt)$$

con $a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = 1$. Si verifica facilmente che γ è contenuta nel toro piatto

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2 \varphi, \quad x_3^2 + x_4^2 = \sin^2 \varphi.$$



Figura 2: proiezione stereografica dal polo Nord e dal polo Sud sul piano equatoriale di un'elica della sfera \mathbb{S}^3

3. Il metodo di Whittmore

In [24] Whittmore, per trovare le eliche della sfera si serve della loro rappresentazione sferica. Questo è reso possibile dal fatto che sulla sfera (ma solo sulla sfera) ci sono delle relazioni differenziali tra curvatura e torsione che sono valide per tutte le curve¹. Per estendere il suo studio ad altre superfici di rotazione egli adotta un metodo che permette di determinare facilmente le equazioni delle eliche delle superfici di rotazione aventi lo stesso asse di queste ultime.

Sia S una superficie di rotazione attorno all'asse z parametrizzata da

$$(1) \quad S(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, f(u)\},$$

e quindi con prima forma fondamentale $ds^2 = (1 + f'^2)du^2 + u^2 dv^2$. Sia poi $\gamma(s)$ un'elica di S parametrizzata con l'ascissa curvilinea s , cioè

$$(2) \quad \gamma(s) = \{u(s) \cos v(s), u(s) \sin v(s), f(u(s))\}.$$

Essendo la curva γ unitaria, se essa forma un angolo acuto costante ϑ_0 con l'asse z , si ha che $u(s)$ e $v(s)$ devono soddisfare alle equazioni differenziali

$$\dot{u}^2(1 + f'^2) + u^2 \dot{v}^2 = 1 \quad \text{e} \quad f' \dot{u} = \cos \vartheta_0,$$

dove $\dot{u} = \frac{du}{ds}$ e $f' = \frac{df}{du}$. Da queste si ricava

$$u^2 \dot{v}^2 = \sin^2 \vartheta_0 - \frac{\cos^2 \vartheta_0}{f'^2} = (f'^2 \tan^2 \vartheta_0 - 1) \dot{u}^2.$$

¹Una notevole è l'equazione differenziale delle curve sferiche ([22] pag. 32, [5]):

$$\rho\tau + (\sigma\rho)' = 0, \quad \rho = \frac{1}{k}, \quad \sigma = \frac{1}{\tau}, \quad \tau \neq 0, \quad k' \neq 0.$$

Quindi

$$\dot{v} = \sqrt{f'^2 \tan^2 \vartheta_0 - 1} \frac{\dot{u}}{u}$$

e, integrando,

$$(3) \quad v = \pm \int \sqrt{f'^2 \tan^2 \vartheta_0 - 1} \frac{du}{u} + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Nella (3) possiamo scegliere $K = 0$ e il segno positivo. Per $K \neq 0$ si ottiene la stessa elica ruotata attorno all'asse z , mentre al segno negativo corrisponde un'elica simmetrica rispetto al piano $x = 0$. In ultima analisi, la ricerca delle eliche di S si può ricondurre al calcolo dell'integrale (3), che in alcuni casi può essere effettuato. Vediamo dunque come, grazie alla (3), è possibile trovare eliche su alcune superfici di rotazione.

Il paraboloide. Consideriamo il paraboloide ottenuto ruotando attorno all'asse z la parabola di equazione $(u, 0, u^2/(2p))$. Sostituendo $f' = u/p$ nella (3) otteniamo

$$(4) \quad \begin{aligned} v(u) &= \frac{\tan \vartheta_0}{p} \int \sqrt{u^2 - p^2 \cot^2 \vartheta_0} \frac{du}{u} \\ &= \sqrt{\frac{\tan^2 \vartheta_0}{p^2} u^2 - 1} - \arccos \left(\frac{p \cot \vartheta_0}{u} \right). \end{aligned}$$

Introducendo nella (4) le notazioni

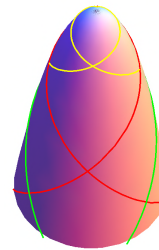
$$R = p \cot \vartheta_0, \quad \cos \varphi(u) = \frac{R}{u}, \quad t(u) = \tan \varphi,$$

troviamo

$$v(u) = \sqrt{\frac{u^2}{R^2} - 1} - \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} - \varphi = \tan \varphi - \varphi = t - \varphi.$$

Quindi le equazioni parametriche dell'elica del paraboloide considerato e la relativa rappresentazione grafica sono

$$\begin{cases} x(u) = u \cos \varphi \cos t + u \sin \varphi \sin t = R \cos t + Rt \sin t \\ y(u) = u \cos \varphi \sin t - u \sin \varphi \cos t = R \sin t - Rt \cos t \\ z(u) = \frac{R^2 + R^2 t^2}{2p} \end{cases}$$



L'iperboloide a una falda. Consideriamo poi l'iperboloide a una falda, ottenuto ruotando attorno all'asse z il ramo di iperbole di equazione $(u, 0, b\sqrt{u^2 - 1}), u > 0$. In questo caso quindi

$$f(u) = b\sqrt{u^2 - 1} \quad \text{e} \quad f'(u) = \frac{bu}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Sostituendo f' nella (3), si può scrivere v in funzione di u :

$$v(u) = \int \sqrt{\frac{u^2(b^2 \tan^2 C - 1) + 1}{u^2 - 1}} \frac{du}{u}.$$

Se si pone

$$\sqrt{b^2 \tan^2 C - 1} = \frac{1}{a}$$

questa diviene

$$v = \frac{1}{a} \int \sqrt{\frac{u^2 + a^2}{u^2 - 1}} \frac{du}{u}.$$

Allora integrando si trova

$$v = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{\sqrt{u^2 + a^2} + \sqrt{u^2 - 1}}{\sqrt{u^2 + a^2} - \sqrt{u^2 - 1}} \right) - \arctan \left[\frac{1}{a} \sqrt{\frac{u^2 + a^2}{u^2 - 1}} \right].$$

Con le ulteriori sostituzioni

$$a = \tan \alpha \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan \left[\frac{1}{a} \sqrt{\frac{u^2 + a^2}{u^2 - 1}} \right]$$

si ottiene

$$\tan^2 \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{u^2 + a^2}{u^2 - 1} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{u^2 - 1}$$

e quindi

$$v = \frac{\cot \alpha}{2} \log \frac{a \tan \varphi + 1}{a \tan \varphi - 1} - \varphi = \frac{\cot \alpha}{2} \log \left(\frac{\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \sin \varphi - \cos \alpha \cos \varphi} \right) - \varphi.$$

Risulta dunque che u e v sono

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{-\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}} \\ v(\varphi) &= \frac{\cot \alpha}{2} \log \left(-\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)} \right) - \varphi, \end{aligned}$$

e possiamo disegnare le eliche sull'iperboloide a una falda (vedi Fig.3).

L'iperboloide a due falde. Consideriamo la componente dell'iperboloide a due falde ottenuta ruotando, attorno all'asse z , il meridiano di equazione $(u, 0, b\sqrt{u^2 + 1})$. Ancora con riferimento alla (3) abbiamo

$$f(u) = b\sqrt{u^2 + 1} \quad \text{e} \quad f'(u) = \frac{bu}{\sqrt{u^2 + 1}}.$$

Questo caso può essere trattato seguendo passo per passo quello precedente dell'iperboloide a una falda, e si trovano le soluzioni

$$u = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}}$$

$$v = \frac{\cot \alpha}{2} \log \left(\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)} \right) - \varphi,$$

che conducono alla relativa rappresentazione grafica



Figura 3: Eliche su iperboloidi a una e a due falde.

Il cono. Facendo ruotare attorno all'asse z la retta

$$\alpha(u) = (u, 0, mu), \quad m \in \mathbb{R},$$

si trova il cono

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) = mu),$$

i cui coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = 1 + m^2, \quad F = 0 \quad G = u^2.$$

Mediante la (3) possiamo quindi determinare v , che risulta avere l'espressione

$$v = \int \frac{\sqrt{m^2 \tan^2 \vartheta_0 - 1}}{u} du = \sqrt{m^2 \tan^2 \vartheta_0 - 1} \log u + d.$$

La superficie a imbuto. Per la superficie a imbuto, ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva

$$\alpha(u) = (u, 0, \log u), \quad u > 0,$$

ciòè

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u),$$

si ha

$$E = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad F = 0, \quad G = u^2.$$

Ancora mediante la (3) troviamo

$$v = \int \left(\frac{1}{u^2} \tan^2 \vartheta_0 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} = \tan \vartheta_0 \int \frac{(1 - u^2 \cot^2 \vartheta_0)^{\frac{1}{2}}}{u^2} du$$

Se poniamo $a = \tan \vartheta_0$ e $b^2 = \cot^2 \vartheta_0$ quest'ultimo integrale assume l'espressione

$$v = a \int \frac{(1 - b^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}{u^2} du.$$

Integrando per parti si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} v &= a \left\{ (1 - b^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{u} \right) - \int \left[\frac{b^2}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} \right] du \right\} \\ &= -a \left[\frac{\sqrt{1 - b^2 u^2}}{u} + b \arcsin(bu) + d \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni delle costanti a e b^2 e ponendo $d = 0$ si trova

$$v = -\frac{\tan \vartheta_0 \sqrt{1 - (\cot^2 \vartheta_0) u^2}}{u} - (\tan \vartheta_0 \cot \vartheta_0) \arcsin[(\cot \vartheta_0) u].$$

Pertanto, semplificando,

$$v = \frac{\sqrt{\cos 2C}}{\cos \vartheta_0} + \arccos[(\cot \vartheta_0) u].$$

Vogliamo ora dare altri due esempi di superfici di rotazione notevoli che non sono quadriche in cui il metodo di Whittemore permette di trovare eliche con lo stesso asse di rotazione della superficie.

Il catenoide. Se γ è una curva contenuta nel catenoide

$$X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

si ha

$$\dot{\gamma} = \{ \sinh u \cos v \dot{u} - \cosh u \sin v \dot{v}, \sinh u \sin v \dot{u} + \cosh u \cos v \dot{v}, \dot{u} \}.$$

Se γ è unitaria e forma un angolo costante ϑ_0 con il versore $(0, 0, 1)$ dell'asse z , cioè se

$$\begin{cases} \|\dot{\gamma}\|^2 = (\sinh^2 u + 1) \dot{u}^2 + \cosh^2 u \dot{v}^2 = 1 \\ \dot{u} = \cos \vartheta_0, \end{cases}$$

si trova

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{v}^2 \cosh^2 u &= 1 - (\sinh^2 u + 1) \cos^2 \vartheta_0 \\ &= \cos^2 \vartheta_0 (\tan^2 \vartheta_0 - \sinh^2 u) \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{v} = \cos \vartheta_0 \sqrt{\frac{\tan^2 \vartheta_0}{\cosh^2 u} - \tanh^2 u},$$

ovvero

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\tan^2 \vartheta_0}{\cosh^2 u} - \tanh^2 u} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Possiamo porre $\tan \vartheta_0 = a$, per cui

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{a^2 - \sinh^2 u}{\cosh^2 u}} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Integrando si ottiene l'espressione di v , che è

$$\begin{aligned} v = & -\frac{1}{1+2a^2-\cosh(2u)} \cosh u \left\{ \sqrt{1+a^2} \operatorname{arctanh} \left[\frac{\sqrt{2+2a^2} \sinh u}{\sqrt{-1-2a^2+\cosh(2u)}} \right] \right. \\ & \cdot \sqrt{-1-2a^2+\cosh(2u)} + \sqrt{a^2} \arcsin \left[\frac{\sinh u}{\sqrt{a^2}} \right] \sqrt{2+\frac{1}{a^2}-\frac{\cosh(2u)}{a^2}} \left. \right\} \\ & \cdot \sqrt{2a^2 \operatorname{sech}^2 u - 2 \tanh^2 u}, \end{aligned}$$

e quindi l'immagine centrale in Fig.4.

La pseudosfera. Consideriamo infine il caso della pseudosfera parametrizzata da

$$X[a](u, v) = a \left\{ \cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \log \left[\tan \left(\frac{v}{2} \right) \right] \right\}.$$

Se $\gamma[a](t)$ è una curva della pseudosfera, cioè se

$$\gamma[a](t) = X[a][u(t), v(t)],$$

il suo vettore velocità è

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}[a](t) = & a \{ -\sin[u(t)] \sin[v(t)] \dot{u}(t) + \cos[u(t)] \cos[v(t)] \dot{v}(t), \\ & \cos[u(t)] \sin[v(t)] \dot{u}(t) + \cos[v(t)] \sin[u(t)] \dot{v}(t), \\ & \cos[v(t)] \cot[v(t)] \dot{v}(t) \}. \end{aligned}$$

Se γ è un'elica con velocità unitaria con asse parallelo all'asse z , devono essere verificate le condizioni

$$\begin{cases} \|\dot{\gamma}[a](t)\|^2 = a^2 (\sin^2[v(t)] \dot{u}(t)^2 + \cot^2[v(t)] \dot{v}(t)^2) = 1 \\ a \cos[v(t)] \cot[v(t)] \dot{v}(t) = \cos \vartheta_0. \end{cases}$$

Ricavando \dot{v} dalla seconda equazione del sistema e sostituendo nella prima otteniamo

$$\dot{u} = \sqrt{\frac{\cos^2 v - c^2}{a^2 \sin^2 v}} \cot^2 v \dot{v},$$

dove abbiamo posto $\cos \vartheta_0 = c$. L'integrazione dà

$$u = \left\{ \sqrt{1 - 2c^2 + \cos(2v)} + \sqrt{2} \arctan \left[\frac{\sqrt{2} \sin v}{\sqrt{1 - 2c^2 + \cos(2v)}} \right] \sin v \right\} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - 2c^2 + \cos(2v)}} \sqrt{\frac{\cot^4 v}{c^2} - \cot^2 v \csc^2 v} \right) \tan v,$$

e con questa espressione è possibile rappresentare le eliche della pseudosfera nell'immagine a destra della Figura 4.

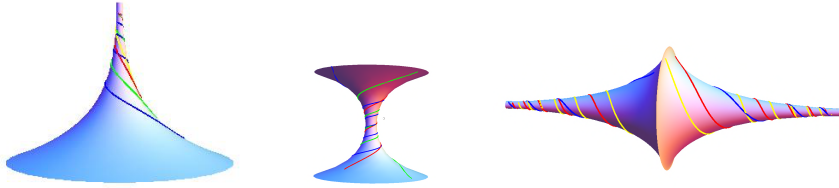


Figura 4: *Eliche sulla superficie a imbuto, sul catenoide e sulla pseudosfera.*

4. Curve biarmoniche nelle varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu

Come si può facilmente immaginare, le eliche appaiono in modo naturale anche in ambito riemanniano, con ruoli geometricamente rilevanti (si veda ad esempio [1] e [13]). Qui noi vogliamo segnalare la presenza di eliche in concomitanza con la ricerca delle curve biarmoniche nel senso di Eells e Sampson ([10]).

Su una varietà differenziabile tridimensionale M consideriamo la famiglia a due parametri di metriche riemanniane

$$(7) \quad ds_{\ell,m}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + m(x^2 + y^2)]^2} + \left(dz + \frac{\ell}{2} \frac{ydx - xdy}{[1 + m(x^2 + y^2)]} \right)^2, \quad \ell, m \in \mathbb{R},$$

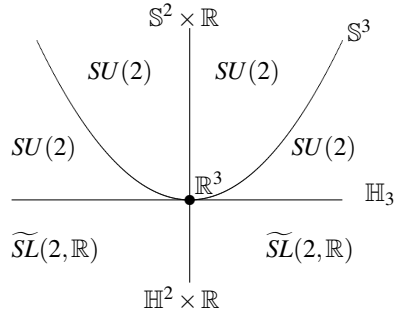
dove $\{x, y, z\}$ è un sistema di coordinate locali su M . Queste metriche sono note da più di un secolo. Si trovano, in forme equivalenti, nella classificazione delle metriche tridimensionali data da L. Bianchi nel 1897 (vedi [4]); successivamente furono studiate nella forma (7) da É. Cartan, in [9], e da G. Vranceanu, in [23].

La loro rilevanza geometrica si basa sul fatto seguente: *la famiglia di metriche (7) include tutte le metriche di uno spazio tridimensionale omogeneo il cui gruppo delle isometrie ha dimensione 4 o 6, ad eccezione di quella a curvatura sezionale costante*

negativa.

In particolare, tra gli spazi che corrispondono ai diversi valori di ℓ e m ci sono 6 delle 8 strutture fondamentali di Thurston, che, a parte \mathbb{R}^3 ($\ell = m = 0$), possono essere rappresentate come punti del piano (ℓ, m) dei parametri ([18]).

- Se $\ell = 0$, allora M è il prodotto tra una superficie S con curvatura Gaussiana costante $4m$ e la retta reale \mathbb{R} .
- Se $4m - \ell^2 = 0$, allora M ha curvatura sezionale costante non negativa.
- Se $\ell \neq 0$ e $m > 0$, allora M è localmente $SU(2)$.
- Se $\ell \neq 0$ e $m < 0$, allora M è localmente $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, il rivestimento universale di $SL(2, \mathbb{R})$.
- Per $m = 0$ e $\ell \neq 0$ si ottiene una metrica invariante a sinistra sul gruppo di Heisenberg \mathbb{H}_3 .



Le curve biarmoniche $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow (N, h)$ di una varietà riemanniana sono soluzioni di un'equazione differenziale del quart'ordine

$$\nabla_{\gamma'}^3 \gamma' - R(\gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma') \gamma' = 0,$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita associata alla metrica h di N , mentre R è il relativo operatore di curvatura di Riemann. Esse risolvono un problema variazionale e sono una naturale generalizzazione delle geodetiche. Le geodetiche sono curve biarmoniche, come si vede subito, ma ci sono curve biarmoniche che non sono geodetiche, e che sono chiamate curve *biarmoniche proprie*.

Sia $\{T = T_i E_i, N = N_i E_i, B = B_i E_i\}$ il riferimento di Frenet tangente a M lungo γ , rappresentato tramite la base ortonormale

$$E_1 = [1 + m(x^2 + y^2)] \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\ell y}{2} \frac{\partial}{\partial z}; \quad E_2 = [1 + m(x^2 + y^2)] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\ell x}{2} \frac{\partial}{\partial z}; \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Allora si ha il seguente

TEOREMA 1. ([8]) *Sia $(M, ds_{\ell, m}^2)$ una varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu. Una curva $\gamma: I \rightarrow (M, ds_{\ell, m}^2)$ parametrizzata con l'ascissa curvilinea è una curva biarmonica propria se e solo se*

$$(8) \quad \begin{cases} k = \text{costante} \neq 0 \\ \tau = \text{costante} \\ N_3 = 0 \\ k^2 + \tau^2 = \frac{\ell^2}{4} - (\ell^2 - 4m)B_3^2. \end{cases}$$

In particolare, le curve biarmoniche proprie sono eliche.

OSSERVAZIONE 1. ([8]) Le biarmoniche proprie:

- giacciono sul *cilindro circolare*

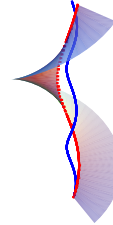
$$S = \{(x, y, z) \in M : (x - c)^2 + (y - d)^2 = b^2 \sin^2 \alpha_0\}$$

e sono geodetiche di S . La superficie S è invariante per traslazioni lungo l'asse z , che sono isometrie per le metriche di Bianchi-Cartan-Vranceanu;

- sono geodetiche del *cilindro* $y = x \tan \beta_0 + a$ o $x = x_0$;
- nel caso $\ell^2 = 4m$, $\ell \neq 0$, cioè nel caso della sfera \mathbb{S}^3 , è stato dimostrato in [6] che le curve biarmoniche proprie sono geodetiche del toro di Clifford, superficie $SO(2)$ -invariante di \mathbb{S}^3 .

Possiamo concludere che qualsiasi curva biarmonica propria delle varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu è una geodetica di una superficie che è invariante rispetto all'azione di un gruppo a 1-parametro di isometrie.

OSSERVAZIONE 2. ([7]) In ciascun punto $p \in \mathbb{H}_3$ i vettori tangenti alle curve biarmoniche per p formano un cono solido C_p in $T_p\mathbb{H}_3$. Per ogni vettore $X_p \in T_p\mathbb{H}_3 \setminus C_p$, l'unica curva biarmonica γ uscente da p e tale che $\dot{\gamma}(p) = X_p$ è la geodetica determinata da p e da X_p . Invece ogni $X_p \in C_p$ è simultaneamente tangente ad una geodetica e ad una curva biarmonica non geodetica. Nella figura a destra, se p è il punto più basso della curva $\gamma(t)$ bordo interno dell'elicoide, e se X_p è il vettore velocità di questa curva, risulta che γ è una curva biarmonica propria, mentre la curva che non giace sull'elicoide è anch'essa tangente a X_p in p ed è una geodetica.



OSSERVAZIONE 3. ([19]) Per la metrica $ds_{\ell,0}^2$ del gruppo di Heisenberg \mathbb{H}_3 , i sottogruppi a un parametro $\sigma(u) = \exp uX$, dove $X = aE_1 + bE_2 + cE_3$, sono eliche. Risulta infatti che se $\sigma(u)$ non è una geodetica, allora la curvatura e la torsione k e τ sono

$$(9) \quad k = \frac{\ell c \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \tau = -\frac{\ell(a^2 + b^2 - c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Inoltre i sottogruppi a un parametro $\sigma(u) = \exp uX$ sono biarmonici se e solo se sono geodetiche. Infatti, se $\sigma(u)$ non è una geodetica, allora k e τ sono sempre correlate dalla formula

$$(10) \quad k^2 + \tau^2 = \frac{\ell^2}{4}$$

e si ha $B_3 \neq 0$; di conseguenza la (8) non è soddisfatta.

5. Geodetiche delle varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu

Ricordiamo innanzi tutto un importante teorema di Levi-Civita.

TEOREMA 2. *Se X è un campo di Killing per la varietà riemanniana (M, g) , allora le equazioni delle geodetiche $\gamma(t)$ ammettono l'integrale primo*

$$g(\dot{\gamma}, X) = \text{costante}.$$

Il Teorema 2, applicato al campo di Killing $E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, dà il seguente integrale primo

$$g(\dot{\gamma}, E_3) = \text{costante}$$

e pertanto γ è un'elica secondo la definizione di Barros ([1]). Vogliamo determinare le curve $\gamma(s)$ delle varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu che sono eliche secondo Barros. L'unico campo di Killing di lunghezza costante per la metrica (7) è dato da

$$\xi = \lambda E_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sia $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea e $\dot{\gamma}(s) = T(s)$ il campo vettoriale tangente. Se γ forma un angolo costante con ξ risulta che $T_3(s) \in (-1, 1)$ ed essendo $T(s)$ di norma unitaria esiste una costante $\alpha_0 \in (0, \pi)$ e un'unica (a meno di una costante additiva $2k\pi$) funzione differenziabile β tale che ([8])

$$T(s) = \sin \alpha_0 \cos \beta(s) E_1 + \sin \alpha_0 \sin \beta(s) E_2 + \cos \alpha_0 E_3.$$

Usando le formule di Frenet risulta che la curvatura di γ è

$$k = (\beta' + 2m \sin \alpha_0 \cos \beta - 2mx \sin \alpha_0 \sin \beta - \ell \cos \alpha_0) \sin \alpha_0,$$

mentre la torsione geodetica τ di γ è data da

$$(11) \quad \tau = -(\beta' + 2m \sin \alpha_0 \cos \beta - 2mx \sin \alpha_0 \sin \beta - \ell \cos \alpha_0) \cos \alpha_0 - \frac{\ell}{2}.$$

In conclusione si ha

$$\sin \alpha_0 \tau + \cos \alpha_0 k = -\frac{\ell}{2} \sin \alpha_0$$

Quindi le eliche generalizzate secondo Barros sono curve di Bertrand. Se $\ell = 0$, ossia se la varietà è una varietà prodotto $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$, esse sono eliche anche in senso classico. Vale inoltre la

PROPOSIZIONE 1. ([17]) *Nelle varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu, le geodetiche $\gamma(t)$ uscenti dall'origine e tali che $\dot{\gamma}(0) = (u, v, w)$ possono essere definite come l'intersezioni di due superfici (Fig. 5):*

- un cilindro circolare con le generatrici parallele all'asse z , o un piano parallelo all'asse z ;
- una superficie di rotazione attorno all'asse z .

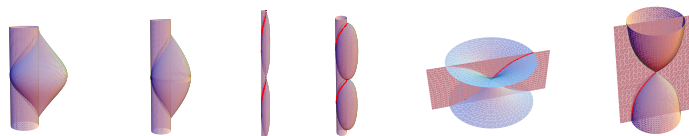


Figura 5: *Geodetiche nelle varietà di Bianchi-Cartan-Vranceanu.*

Riferimenti bibliografici

- [1] BARROS M., *General helices and a theorem of Lancret*, Proceedings of the Am. Math. Soc. **125** (1997), 1503–1509.
- [2] BEKKAR M., SARI T.; *Surfaces minimales réglées dans l'espace de Heisenberg H_3* . Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 50, **3** (1993), 243–254.
- [3] BIANCHI L., *Lezioni di Geometria Differenziale*. Terza edizione interamente rifatta. Ed. Zanichelli, Bologna, 1927.
- [4] BIANCHI L., *Gruppi continui e finiti*. Ed. Zanichelli, Bologna, 1928.
- [5] CADDEO R. AND GRAY A., *Curve e Superfici*, Vol. 1, CUEC, Cagliari 2001.
- [6] CADDEO R., MONTALDO S., ONICIUC C., *Biharmonic submanifolds of \mathbb{S}^3* , Internat. J. Math. **12** (2001), 867–876.
- [7] CADDEO R., ONICIUC C., PIU P., *Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **62** (2004), 265–277.
- [8] CADDEO R., MONTALDO S., ONICIUC C., PIU P., *The Euler-Lagrange method for biharmonic curves*, Mediterr. J. Math. **3** no. 3–4 (2006), 449–465.
- [9] CARTAN É., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier Villars, Paris 1946.
- [10] EELLS J. AND SAMPSON J. H., *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [11] ENNEPER A., *Zur theorie der Kurven doppelter Krümmung*, Math. Ann. **19** 1 (1881), 72–83.
- [12] HAYDEN H. A., *On a generalized helix in a Riemannian n -space*, Proc. London Math. Soc. **32** (1931), 37–45.
- [13] GLUCK H., *Geodesics in the unit tangent bundle of a round sphere*, Enseign. Math. (2) **34** 3–4, (1988), 233–246.

- [14] LORIA G., *Curve sghembe speciali*, Vol. II, Zanichelli, Bologna 1925.
- [15] MONTERDE J., *Curves with constant curvature ratios*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **13** 1 (2007), 177–186.
- [16] PIRONDINI G., *Sulla teoria delle superficie di rivoluzione*, Ann. Mat. Pura App., Series 2 (1890-03-01), 165–212.
- [17] PIU P. AND PROFIR M. M., *On the three-dimensional homogenous $SO(2)$ -isotropic Riemannian manifolds*, An. Șt. Cuza, Iași. Mat. **57** 2 (2011), 361–376.
- [18] PIU P., *Sur certains types de distributions non-intégrables totalement géodésiques*, Tesi di dottorato, Mulhouse 1988.
- [19] PIU P. AND SANINI A., *One-parameter subgroups and minimal surfaces in the Heisenberg group*, Note Mat. **18** 1 (1999), 143–153.
- [20] ROMERO-FUSTER M.C. AND SANABRIA-CODESAL E., *Generalized helices, twistings and flattenings of curves in n -space*, Mat. Contemp. **17** (1999), 267–280.
- [21] SALKOWSKI E., *Das Aoust'sche Problem der Kurven theorie*, Sitzungsberg. der Berliner math. Ges., 1907.
- [22] STRUIK D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New-York 1988.
- [23] VRANCEANU G., *Leçons de géométrie différentielle*, Ed. Acad. Rep. Pop. Roum., vol I, Bucarest 1957.
- [24] WHITTEMORE J. K., *Bertrand curves and helices*, Duke Math. J. **5** 1 (1940), 235–245.

AMS Subject Classification: 58E20, 31B30.

Renzo CADDEO, Paola PIU

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Cagliari

Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, ITALY

e-mail: caddeo@unica.it, piu@unica.it

Lavoro pervenuto in redazione il 01.12.2015 e accettato il 04.03.2016.