Geom. Struc. on Riem. Man.-Bari
Vol. 73/1, 3–4 (2015), 77 – 87

G. De Cecco[1]

RENÉ THOM: IL CONCETTO DI BORDO E IL BORDO DI UN CONCETTO

Abstract. In this article R. Thom's thought about the concept of boundary is briefly examined: we know because we manage to distinguish the contour of both things and concepts. The author then presents the difference, from a mathematical standpoint, between "boundary" and "frontier".

1. Introduzione

Innanzitutto auguri ad Anna Maria, da parte degli amici e colleghi dell'Università di Lecce. Io conosco Anna Maria dagli anni '70, quando veniva a Lecce, guidando un gruppo di collaboratrici, che chiamavamo "le ragazze di Bari" e questo nome è rimasto a lungo. In quel tempo sono stati ospiti a Lecce, invitati particolarmente da Ida Cattaneo, i protagonisti della Geometria Differenziale di allora: T. Willmore, J. Koszul, A. Lichnerowicz, Y. Choquet-Bruhat, W. Klingenberg, A. Dold, ..., che si fermavano per 8-10 giorni e tenevano brevi cicli di seminari in cui spesso, partendo da nozioni di carattere introduttivo, arrivavano a trattare argomenti di ricerca.[2]

Mi fa piacere essere presente a questa manifestazione, accogliendo, pur con grande preoccupazione, l'invito a tenere una conferenza di tipo divulgativo.

Figura 1: Convegno INdAM 1981

[1]Già professore dell'Università del Salento.

[2]D. Pallara *La Matematica nell'Università di Lecce* in *Per una storia della scienza e della tecnologia nel Salento dall'Unità d'Italia a oggi,* (a cura di A. Rossi, A.L. Denitto, G. Sava, G. Belmonte, L. Ruggiero, A. Castellano), Congedo Editore, Galatina (Lecce), 2011.

2. La questione della divulgazione

Preciso innanzitutto che il mio intervento qui non è divulgazione, poiché voi non siete "volgo". Si tratta invece di condivisione, poiché, usando una terminologia tecnica, la sorgente e il ricevente del messaggio sono omogenei: infatti ho con tutti voi un linguaggio comune e i concetti sono più o meno noti[1].

Altra cosa è parlare a chi è digiuno di matematica, il cosiddetto "vulgus" cioè un anonimo pubblico, che ignora il linguaggio, la validità e i limiti del sapere scientifico. Si pone quindi il problema:

È possibile divulgare la matematica, sottinteso, in modo corretto?

Penso che non tutta la matematica si possa divulgare (nel senso prima precisato) senza correre il rischio di banalizzare il tutto e di dare una immagine errata. Mi viene in mente per es. tutto ciò che ha bisogno in modo essenziale di un formalismo spinto.

È vero che Hilbert, nel famoso Congresso di Matematica del 1900, ebbe a dire che un problema, capace di sviluppare nuovi campi di conoscenza, deve potersi spiegare a chiunque, ma è pur vero che egli si riferiva all'enunciazione del problema, non alle sue eventuali soluzioni.

Dobbiamo però non rinunciare subito, ma impegnarci a rendere il problema e le soluzioni comprensibili: la divulgazione come trasmissioni di conoscenze è necessaria e benemerita, poiché le persone dovrebbero continuare ad apprendere.

Ma che vuol dire "corretta divulgazione"?

E. De Giorgi (1928-1996) - che la maggior parte di voi ha conosciuto, almeno di nome, uno dei più illustri matematici del secolo scorso, che ha risolto il XIX problema di Hilbert[2]- nell'insegnamento invitava ad

> *esporre principalmente le idee non le procedure, a mettere in evidenza ciò che si è dimostrato, ciò che si è solo ipotizzato, evitando che di una teoria siano date interpretazioni più ampie, senza scivolare nel sensazionalismo o nella grossolanità, dicendo chiaramente che i problemi aperti sono in numero di gran lunga maggiore di quelli risolti. Una congettura non provata, un errore non banale in una dimostrazione possono essere elementi più stimolanti alla ricerca che perfette dimostrazioni.*

Si tratta insomma di sfruttare anche l'insuccesso!

Dopo questa lunga premessa apparirà più comprensibile perché ho scelto di parlare di René Thom (1923-2002), certamente uno dei grandi matematici del secolo scorso, Medaglia Fields nel 1958. Egli ha messo in evidenza l'importanza del pensiero matematico (in particolare la visione geometrica) come strumento di lettura del mondo reale. In particolare voleva studiare modelli che descrivono la "rottura della

[1]Cfr. G. De Cecco,*Comunicazione dei saperi: la questione della divulgazione scientifica* in *L'utopia: alla ricerca del senso della storia. Scritti in onore di Cosimo Quarta* (a cura di G. Schiavone con la collaborazione di D. Martina), Mimesis Edizioni, Milano-Udine 2015, pp. 509-525.

[2]Cfr.*E. De Giorgi: hanno detto di lui...* (a cura di G. De Cecco, M.L. Rosato), Quad. 5/2004, Univ. Lecce, SIBA, Edizioni del Grifo. Il lavoro che risolve il XIX problema è *Sulla differenziabilità e l'analicità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Acc. Sc. Torino, Cl. Sci. Fis. Nat. (3),3,25-43.

continuità" e quindi i concetti di bordo e di frontiera, partendo dall'osservazione che noi conosciamo perché riusciamo a distinguere i confini, i contorni delle cose e dei concetti.

Le sue idee collegano la matematica ad altri rami del sapere e sono diffusamente trattate nei volumetti *Paraboles et catastrophes* e *Prédire n'est pas expliquer*, che riportano due interviste all'autore[3].

Del secondo ho curato il commento insieme a Giuseppe Del Re, chimico ed epistemologo dell'Università di Napoli, e ad Arcangelo Rossi, storico e filosofo della scienza dell'Università del Salento[4].

3. Thom e la metafisica

Thom approfondisce il concetto di "bordo" partendo dalla metafisica di Aristotele come è chiaramente espresso in questo passo[5]:

> *La notion de bord me parait aujourd'hui d'autant plus importante que j'ai plongé dans la métaphysique aristotelicienne. Pour Aristote, un être, en géneral, c'est ce qui est là, séparé. Il possède un bord, il est séparé de l'espace ambiant. En somme, le bord de la chose, c'est sa forme. Le concept, lui aussi, a un bord: c'est la définition de ce concept.*

In un altro passo Thom dice che l'atto è il bordo della potenza, come la forma è il bordo della materia.

Non deve meravigliare che l'ispirazione per una significativa teoria matematica nasca dalla metafisica. Infatti alla base di un discorso scientifico ci sono sempre, impliciti o espliciti, presupposti di ordine filosofico, che spesso sfuggono allo stesso scienziato, come osserva il matematico e storico della scienza G. Israel[6]:

> *Il successo della scienza è legato al fatto di aver costruito una fisica a partire da una metafisica, e non viceversa. Mentre Aristotele diceva di osservare i fenomeni meccanici per come sono, senza astrazioni, e da quell'osservazione materiale giungeva ad una metafisica, la scienza moderna*

[3]R. Thom, *Paraboles et catastrophes* (intervista di G. Giorello e S. Martini), Éd. Champs Flammarion, no 186, 1983; R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer* (intervista di E. Noël), éd. Champs Flammarion, no. 288, 1993.

[4]*René Thom: prevedere non è spiegare* (a cura di G. De Cecco, G. Del Re, A. Rossi), Traduzione e commento di G. Del Re con la collaborazione di G. Bonomi, Quad. 3/2008, Dip. Mat. Univ. Salento, SIBA.

[5]Da *Prédire n'est pas expliquer*, pag.22: *Da quando mi sono immerso nello studio della metafisica aristotelica, il concetto di bordo mi sembra ancora più importante. Per Aristotele, un essere, in generale, è ciò che c'è lì, separato: esso possiede un bordo ed è separato dall'ambiente. In sintesi, il bordo della cosa è la sua forma. Anche un concetto ha un bordo, che è la sua definizione.*

Cfr. anche R. Thom, *Les intuitions primordiales de l'aristotélisme*, Reviu Thomiste, Juillet-September 1988, Toulouse, pp. 393-409.

[6]*Divulgazione scientifica e cultura*, F. Nardini intervista G. Israel, in *Conversazioni su Scienza e Fede*, a cura del Centro di Documentazione Interdisciplinare di Scienza e Fede della Pontificia Università della Santa Croce, Lindau, Torino 2012, pp. 204-223.

ha seguito la via inversa: da una metafisica di partenza ha dedotto una fisica. L'operazione di astrazione di un problema dalla realtà (ad esempio immaginare un sistema privo di attrito o assimilare un corpo a un punto materiale) è correlato ad una concezione platonica del mondo, il che esclude la possibilità di relegare la filosofia alla categoria di non scienza.

André Weil in uno scritto del 1960 intitolato *De la métaphysique aux mathématiques* così scrive[7]:

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître. [...] *La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.*

Che la Matematica abbia legami con la Filosofia non è una novità: la metafisica ha influenzato le ricerche in matematica da Pitagora a Grothendieck. Ricordo per esempio che alla base del calcolo delle variazioni c'è un principio generale d'economia (di sapore metafisico) espresso chiaramente da L. Euler (1707-1783) così[8] (nell'Appendice all'opera *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*[9] del 1743):

Cum enim mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat.

Il libro di S. Hildebrandt e A. Tromba *Principi di minimo*[10] illustra molto bene l'evoluzione di questi concetti[11], avvalorando la convinzione che in generale i matematici sono con Platone: le idee, le strutture matematiche vengono prima delle cose.

[7]*Come sanno tutti i matematici, nulla è più fecondo di queste oscure analogie, questi indistinti riflessi tra una teoria e l'altra, queste carezze furtive, queste indecifrabili foschie; e nulla dà maggiore piacere allo studioso. Poi, un giorno, l'illusione svanisce, il presentimento diventa certezza, le teorie gemelle rivelano la loro origine comune primadi svanire* [...] *La metafisica è diventata matematica, pronta a formare la materia di un trattato la cui fredda bellezza non saprà più emozionarci.*
Come si vede qui si tratta però non della "vera" metafisica, ma di un insieme di vaghe analogie.

[8]*Essendo la costruzione del mondo la più perfetta possibile, come quella di un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo.*

[9]Questo è il primo libro di testo sul Calcolo delle variazioni, testo giustamente celebre nella storia della matematica.

[10]S. Hildebrandt e A. Tromba *Principi di minimo. Forme ottimali in natura*, Scuola Normale Superiore Pisa, 2006; titolo orignale *The Parsimonious Universe. Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag New York, Inc. 1996.

[11]Si consideri l'importanza che ha avuto in questa evoluzione il *principio di minima azione* di P-L Moreau de Maupertuis (1698-1759), formulato nel 1744 e riportato estensivamente nell'opera *Les lois du moviments et des répos, déduites d'un principe de métaphysique* del 1746.

Come E. De Giorgi, Thom ha sempre sostenuto che l'essenza della matematica non sta nel calcolo e che, spesso nelle fasi iniziali di introduzione di modelli, l'aspetto qualitativo è preminente rispetto a quello quantitativo.

Queste idee mi sembra opportuno ribadire oggi, dopo che negli ultimi decenni, in particolare in pedagogia, si è privilegiata una visione "funzionalista", che ha svuotato la matematica della sua funzione educativa e culturale.

Ce que limite le vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiant[12]- dice Thom; a lui è attribuito anche il detto *Se devo scegliere tra rigore e significato, non esito un istante a scegliere il secondo*.

Thom di fronte ai virtuosismi tecnici e all'eccessivo astrattismo volge la sua attenzione alle basi intuitive della sua disciplina; infatti nella scienza moderna accade di frequente che un formalismo, quasi sempre elegante, a stento lascia scoprire la realtà nascosta dietro le formule. Anche E. Cartan[13] (padre di Henri, maestro di Thom) aveva espresso questa convinzione[14]:

> *Les services éminents qu'a rendus et que rendra encore le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita ne doivent pas nous empcher d'éviter les calculs trop exclusivement formels, ou les débauches d'indices masquent une réalité géométrique souvent très simple. C'est cette réalité que j'ai cherché à mettre partout en évidence.*

Thom riconosce che l'idea aristotelica di "forma" lo ha guidato nella costruzione della sua originale "teoria delle catastrofi" (che dal punto di vista matematico è uno studio delle singolarità di applicazioni differenziabili), il cui nome, privato del suo significato etimologico e tecnico, è stato frainteso. Infatti il significato originario della parola "catastrofe" è "capovolgimento" (da *katà=giù* e *strèpho=vòlgo*).

A proposito della nascita della teoria delle catastrofi egli dice[15]

> *J'ai pour cela repris les travaux d'un mathèmaticien américain, mort récemment, Hassler Whitney. Partant de là, j'ai pu développer la classification des modes par lesquels on peut envoyer un espace dans un autre. Ce que j'ai découvert dans cette direction était assez intéressant. J'ai pu parvenir à quelques classifications. J'ai même plongé dans la physique, lorsque j'était professeur à Strasbourg: je voulais vérifier des idées*

---

[12]*Ciò che limita il vero, non è il falso, è l'insignificante*

[13]E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthiers-Villars, 1928.

[14]*I servizi eminenti che ha reso e renderà ancora il calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita non devono impedirci di evitare i calcoli troppo esclusivamente formali, dove l'uso eccessivo degli indici maschera una realtà geometrica spesso molto semplice. È questa realtà che io ho cercato di mettere dappertutto in evidenza.*

[15]Da *Prédire n'est pas expliquer*, pag. 22: *Richiamandomi alle ricerche svolte da un matematico americano, morto recentemente, Hassler Whitney (1907-1989), ho potuto sviluppare la classificazione dei modi con cui si può applicare uno spazio in un altro. Ciò che scoprii in questa direzione fu abbastanza interessante. Pervenni ad alcune classificazioni. Mi immersi anche nella fisica quando ero professore a Strasburgo: volevo verificare alcune idee matematiche con l'ottica geometrica. ciò che trovai non mancava d'interesse. La teoria delle catastrofi nacque da tutto questo lavoro.*

> *mathématiques par l'optique géométrique: ce que j'y ai trouvé ne manquait pas d'intérêt. La théorie des catastrophes est née de ce travail.*

Quando Thom si propone di studiare una proprietà geometrica del mondo ideale della Matematica, non perde di vista la realtà concreta della sua esperienza; la sta solo leggendo in un particolare modo, che fa parte in ultima analisi del suo approccio conoscitivo.

Ecco come "vede" una "singolarità"[16]:

> *Les espaces que l'on considère généralement sont des espaces homogènes, localement homogènes. Ces espaces sont ce que nous appelons des variétés. L'espace euclidien est une variété. Mais les singularités apparaissent lorsque l'on soumet en quelque sorte l'espace à une contrainte. La manche de ma veste, si je la comprime, je fais apparaître des plis. C'est une situation génerale. Cela ne relève pas de la mécanique des matériaux. J'énonce en réalité un théorème abstrait: lorqu'un espace est soumis à una contrainte, c'est-à-dire lorsqu'on le projecte sur quelque chose de plus petit que sa propre dimension, il accepte la contrainte, sauf en un certain nombre de points où il concentre, si l'on peut dire, toute son individualité première. Et c'est dans la présence de ces singularités que se fait la résistance. Le concept de singularité, c'est le moyen de subsumer en un point toute une structure globale.*

Riprendendo l'esempio della manica della giacca: come per togliere le pieghe bisogna stendere il braccio, così Thom introduce il concetto di "dispiegamento universale", che è un modo di dispiegare tutta l'informazione racchiusa nella singolarità. Egli collega questo alla coppia aristotelica potenza/atto.

Insomma Thom ha osservato con nuovi occhi alcuni aspetti che sembrano schontati, ha messo in discussione fatti comunemente accettati come ovvii e "naturali". Questo ha anche colpito H. Hopf, che nella presentazione dell'opera di Thom per la Medaglia Fields (nel Congresso internazionale di Edimburgo nel 1958)[17] dice espressamente che[18]:

---

[16]Da *Prédire n'est pas expliquer*, pag.23: *Gli spazi che generalmente si considerano sono spazi omogenei, localmente omogenei. Questi spazi sono quelli che noi chiamiamo varietà. Lo spazio euclideo è una varietà. Le singolarità appaiono quando in qualche modo si sottopone lo spazio ad un vincolo. La manica della mia giacca, se la comprimo, fa comparire delle pieghe. è una situazione generale. Questo non dipende dalla meccanica dei materiali. Enuncio in realtà un teorema astratto: quando uno spazio viene sottoposto ad un vincolo, vale a dire quando lo si proietta su qualcosa di più piccolo della sua dimensione, esso accetta il vincolo salvo in un certo numero di punti in cui concentra, per così dire, tutta la sua individualità primaria. Ed è nella presenza di queste singolarità che si ha la resistenza. Il concetto di singolarità è il modo di assumere in un punto tutta una struttura globale.*

[17]H. Hopf, *The work of R. Thom*, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York 1960.

[18]*...le sue fondamentali idee, della cui grande semplicità ho io parlato prima, sono di natura squisitamente geometrica ed intuitiva. Queste idee hanno significativamente arricchito la Matematica e tutto indica che l'impatto delle idee di Thom–che trovano ora la loro espressione in lavori noti o in preparazione–è lungi dall'essere esaurito.*

> *...seine grundlegenden Ideen, von deren grossartiger Einfachheit ich vorhin gesprochen habe, sind von durchaus geometrisch-anschaulicher Natur. Diese Ideen haben die Mathematik wesentlich bereichert, und alles deutet darauf hin, dass die Wirkung Thomscher Ideen — mögen sie nun in den schon bekannten oder in noch ungeschriebenen Arbeiten zum Ausdruck kommen — noch lange nicht erschöpft ist.*

4. Il concetto di frontiera e di bordo

Prima di andare avanti vorrei fermarmi un momento sul concetto di frontiera e di bordo, concetti che hanno analogie, ma che sono sostanzialmente distinti, anche se spesso vengono identificati, usando lo stesso simbolismo. Anche nella lingua italiana essi non sono equivalenti: nessuno direbbe la “frontiera di un quadro”, ma il “bordo di un quadro”, così diciamo le “frontiere della scienza”, non “i bordi della scienza”.

“Frontiera” indica qualcosa che sta di fronte ad un’altra e sottintende un’idea di passaggio (per es. la frontiera di uno Stato); “bordo” è legato al concetto di orlo, una parte esterna che sta intorno ad una parte centrale e quindi estremità di una cosa, rottura di continuità.

Ritornando alla Matematica, il concetto di frontiera appartiene alla Topologia generale, mentre quello di bordo appartiene alla Topologia algebrica e alla Geometria differenziale.

La frontiera di un insieme X dipende dallo spazio ambiente E, come si vede con esempi. La indicheremo perciò $\mathcal{F}_E(X)$.

Sia

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 | \operatorname{dist}(O,x) < 1\}$$

allora

$$\begin{array}{ll} X \subset \mathbb{R}^2 = E & \Rightarrow \mathcal{F}_E(X) = \mathbb{S}^1 \\ X \subset \mathbb{R}^3 = E & \Rightarrow \mathcal{F}_E(X) = X \\ X = E & \Rightarrow \mathcal{F}_E(X) = \emptyset. \end{array}$$

Se X è un insieme aperto o chiuso dal punto di vista topologico, allora

$$\mathcal{F}_E(\mathcal{F}_E(X)) = \mathcal{F}_E(X).$$

Poiché $\mathcal{F}_E(X)$ è un chiuso, in ogni caso si ha una sorta d’idempotenza:

$$\mathcal{F}_E^h(X) = \mathcal{F}_E^2(X) \qquad h \geq 2.$$

Sia ora X una *varietà n-dimensionale con bordo*. Il bordo ∂X non dipende dall’immersione di X in uno spazio ambiente; i punti del bordo sono *intrinsecamente* differenti dai punti di X, privata del bordo ∂X.

Lo spazio topologico ∂X è una (n-1)-varietà priva di bordo, cioè

$$\partial(\partial X) = \emptyset.$$

Questo risultato chiarisce bene la differenza tra i due concetti, frontiera e bordo.

Ricordiamo che se X è uno spazio compatto e $\partial X = \emptyset$, allora X è detto *combinatorialmente chiuso*. Questo traduce il concetto intuitivo di curva chiusa, di recipiente chiuso, cioè con il coperchio. Una semisfera (cioè una scodella) è un insieme chiuso dal punto di vista topologico, ma una 2-varietà non chiusa, poiché il suo bordo (una circonferenza) è non vuoto.

5. Il cobordismo

Il matematico N. Steenrod (1910-1971) aveva posto il seguente problema (riportato in un articolo di Eilenberg del 1949):

Quali sono le condizioni affinché una varietà sia bordo di un'altra?

Thom ha affrontato la questione generalizzandola:

Quando due varietà sono bordo comune di una stessa varietà?

Se una delle due è l'insieme vuoto, si ritorna al problema originario.

Lascio la parola allo stesso Thom, che spiega come è nata la teoria del cobordismo[19]:

> *Il s'agissait de savoir quand deux variétés constituent justement le bord commun d'une même variété; c'est un problème qui, à première vue, peut sembler assez gratuit. Mais si on y réfléchit un peu, on s'aperoit que c'est le cas particulier d'un problème qui présente également un aspect philoshique. Nous avons deux espaces, deux variétés différentes et l'on cherche, en quelque sorte, à les réunir avec une espèce de déformation continue. La meilleure faon est, en définitive, la construction d'un "cobordisme" entre les deux variétés. A l'aide d'idées de ce type j'ai pu développer toute une technique sur les applications différentiables, grâce à laquelle j'ai réussi à résoudre, au moins en théorie, le problème de reconnaître si deux variétés sont cobordantes, en le réduisant en termes purement algébriques.*

La via seguita da Thom è quella classica: tradurre il fatto qualitativo in uno quantitativo, più precisamente tradurre il problema topologico in uno algebrico, con la segreta speranza che questo sia di più facile soluzione; in ogni caso aver stabilito un'analogia è di grande interesse. Pensiamo per esempio alla Geometria analitica.

[19]Da *Paraboles et catastrophes*, pag.22: *Si trattava di sapere quando due varietà costituiscono appunto il bordo comune di una stessa varietà: è un problema che a prima vista può sembrare abbastanza gratuito. Ma se ci riflettiamo un po', ci accorgiamo che è caso particolare di un problema che ha anche un suo risvolto filosofico. Abbiamo due spazi, due varietà differenti, e si cerca in qualche modo di congiungerle con una specie di deformazione continua. Il modo migliore risulta essere la costruzione di un "cobordismo" fra le due varietà. Con l'aiuto di questo tipo di idee, ho potuto sviluppare tutta una tecnica sulle applicazione differenziabili, attraverso la quale sono riuscito a risolvere, almeno teoricamente, il problema di riconoscere se le due varietà sono cobordanti, riducendolo in termini puramente algebrici.*

Non sempre però le asserzioni sono invertibili, per cui ritornare indietro spesso non è significativo.

Thom nel lavoro *Quelques proprièté́s globales des variétés differentiables*, (Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17–86) dà una risposta abbastanza completa al problema, già studiato dalla scuola russa di Topologia differenziale, in particolare da L. Pontrjagin e B.A. Rokhlin, che avevano iniziato la teoria del "cobordismo", chiamata nella letteratura russa "omologia intrinseca". Thom facendo intervenire tutto ciò che allora si conosceva in Topologia algebrica, usando procedimenti analoghi a quelli che si incontrano nella Teoria di Morse, riesce ad invertire alcuni teoremi di Pontrjagin. Il teorema finale, che dà risposta esaustiva alla questione, fa intervenire risultati anche di Milnor, Averbuh, Wall:

Teorema. *Una varietà n-dimensionale differenziabile compatta e orientata è bordo di una varietà (n+1)-dimensionale se e solo se i suoi numeri di Stiefel-Whitney e i suoi numeri di Pontrjagin sono nulli.*

La definizione dei numeri di Stiefel-Whitney e dei numeri di Pontrjagin non è semplice e poi non sono in grado di andare nei dettagli del teorema. Si tratta di classi dell'anello caratteristico di Stiefel-Whitney e di Pontrjagin aventi dimensione adeguata.

Ora esporrò brevemente soltanto l'idea geometrica di cobordismo e come è partito Thom nell'affrontare il problema.

Ci occuperemo soltanto del caso elementare, cioè di varietà non singolari. Il caso di varietà singolari ci fu presentato da A. Dold in un ciclo di seminari negli anni 70[20].

Consideriamo varietà n-dimensionali senza bordo, compatte ed orientate, non necessariamente connesse; per esempio una 1-varietà può essere unione finita di circonferenze ciascuna disgiunta da tutte le altre.

Se M è una varietà con una data orientazione, indichiamo con $-M$ la stessa varietà con l'orientazione opposta;

se M e N sono due n-varietà, indichiamo con $M+N$ l'unione disgiunta di copie di M e N, così $M-N$ sarà $M+(-N)$

$M\cdot N$ è la varietà di dimensione $2n$, prodotto cartesiano di M e N con l'orientazione indotta[21].

Se per una n-varietà M esiste una $(n+1)$-varietà Λ compatta orientata con bordo $\partial\Lambda$ che è una copia di M, si dice che M è *bordante* (cioè M è bordo di qualcosa).

Se $M-N$ è bordante, diciamo che M e N sono *cobordanti*, in simboli $M\sim N$.

Se M è bordante, diciamo anche che M è cobordante alla varietà nulla O, in simbololi $M\sim O$.

[20] A. Dold, *Metodi moderni di topologia algebrica,* lezioni raccolte da M. Bordoni, F. Cacciafesta, A. Del Fra, S. Marchiafava, G. Romani, Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del CNR, Ist. Mat. "G. Castelnuovo", Un. Roma, 1973.

[21] I simboli $\setminus, \cup, \times$ sono simboli insiemistici, mentre $-, +, \cdot$ sono simboli algebrici che tengono conto dell'orientazione della varietà.

Affinché gli esempi possano essere visualizzati con l'intuizione ordinaria, considereremo varietà di dimensione 1 e 2.

1. Se $M = S$ è una circonferenza ed $N = \emptyset$, allora il cobordismo tra M ed N, $M \sim N$, può realizzarsi tramite una semisfera Σ tale che $\partial\Sigma = S$.

2. Siano S_1 e S_2 due circonferenze complanari i cui corrispondenti dischi chiusi siano disgiunti. Allora è possibile considerare una superficie omeomorfa ad un cilindro Γ avente come bordo $S_1 - S_2$. Risulta allora che $S_1 \sim S_2$ tramite Γ.

3. Se $M = S_1 + S_2$ (dove S_1 e S_2 sono due circonferenze disgiunte per es. del piano $z = 0$), e $N = S$ (circonferenza per esempio del piano $z = 1$), allora $M \sim N$ tramite una superficie Λ a forma di "pantaloni" dove S è la circonferenza della vita mentre S_1 e S_2 sono le circonferenze dei bordi delle gambe.

4. Se sulla circonferenza S costruiamo la superficie Σ con bordo S e consideriamo la superficie Λ dell'esempio precedente, possiamo concludere che $\Lambda \cup \Sigma$ è un cilindro Γ. Inversamente un cilindro Γ si può decomporre in due superficie Σ e Λ tramite il "cobordismo" di due opportune curve.

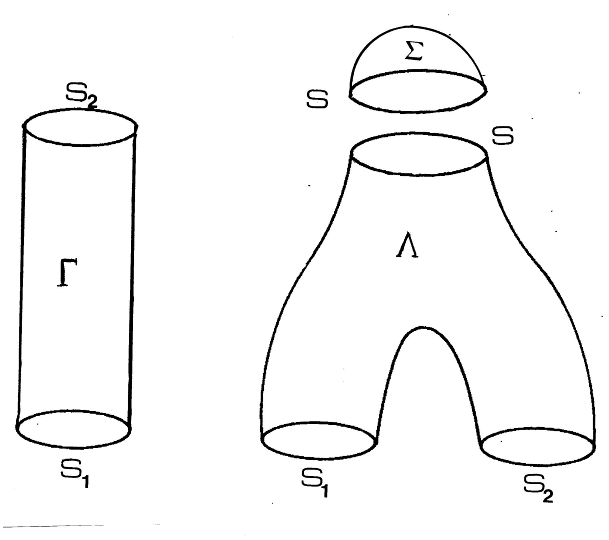

Figura 2: Cobordismo

6. Algebra di Thom

La relazione di equivalenza "$\sim$" definisce *classi di cobordismo* e la suddivisione in classi è compatibile con l'addizione, che induce una struttura di gruppo nell'insieme Ω^n delle classi (delle varietà cobordanti n-dimensionali); la classe delle varietà bordanti costituisce l'elemento neutro.

La divisione in classi è compatibile anche con la moltiplicazione, che dota

$$\Omega = \Omega^0 + \Omega^1 + \Omega^2 + \cdots$$

di una struttura algebrica di anello, la cosiddetta *algebra di Thom*, utilizzata per lo studio in particolare delle varietà differenziabili.

Un fatto notevole è che certi invarianti della struttura differenziale sono anche invarianti per la relazione di cobordismo e la conoscenza di Ω^n permette di ottenere fra questi invarianti relazioni inaspettate.

AMS Subject Classification: 00A30

Giuseppe DE CECCO
Via Montefeltro 2, 00139 Roma, ITALY
e-mail: `giuseppe.dececco@unisalento.it`

Lavoro pervenuto in redazione il 01.09.2015 e accettato il 21.09.2015.