Rendiconti Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 76, 1 (2018), 5 – 31

I. Bazine - D. Ascoli - H. Fujita Yashima

ESTIMATION DANS W^1_∞ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT AVEC UNE CONDITION D'ENTRÉE ET APPLICATION À UN MODÈLE POUR L'ATMOSPHÈRE AVEC LA TRANSITION DE PHASE DE L'EAU

Abstract. Dans le présent travail on considère l'équation de transport linéaire avec la condition d'entrée donnée sur la partie d'entrée de la frontière et on démontre une estimation de la solution dans W^1_∞. Dans la seconde partie du travail, en utilisant ce résultat, on démontre l'existence et l'unicité de la solution locale d'un système d'équations quasi-linéaire issu de la modélisation de l'atmosphère.

1. Introduction

Le problème de l'existence et de l'unicité ainsi que de la régularité de la solution d'une équation de transport linéaire a été étudié par nombre de mathématiciens (voir par exemple [3], [7], [1] pour ne citer que quelqu'uns parmi les travaux les plus connus). Or, dans le cas où l'équation est envisagée avec une condition d'entrée (donnée à la frontière du domaine), on trouve une problématique plus complexe, comme il a été évoqué par plusieurs auteurs [3], [9], [8], [6], [5]. Dans [8], les auteurs ont étudié en détail le problème pour l'équation de transport stationnaire avec des données d'entrée. En particulier ils considèrent le problème de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cadre des espaces de Sobolev $W^s_p(\Omega)$, $1 < p < \infty, 0 < s \leqslant 1$; pour éviter l'irrégularité de la solution ils imposent des conditions assez complexes dans le voisinage de la frontière. Plus récemment, la question de l'affaiblissement de la condition sous laquelle il existe une solution a été approfondie de manière fort accentuée. On cite par exemple le travail [1], dans lequel l'auteur considère une équation de transport dont le champ de vitesse appartient à l'espace des fonctions à variation totale bornée (BV). Plus tard, dans [6] les auteurs ont établi le caractère bien posé des problèmes aux limites pour les équations de continuité où le champ de vitesse est borné, à divergence bornée et est dans $L^1_{loc}(0,T;BV(\Omega_*;\mathbb{R}^n))$ pour tout ensemble ouvert et borné $\Omega_* \subseteq \Omega$. Or, la question de l'estimation du gradient de la solution n'a – semble-t-il – pas aussi attiré l'attention des mathématiciens dans les derniers temps. Mais nous constatons que, lorsqu'il s'agit des équations non linéaires, l'estimation du gradient de la solution de l'équation linéarisée est souvent la clé de la résolution du problème non linéaire.

Dans [2] les auteurs, en étudiant l'équation de transport linéaire, ont établi des estimations, y compris l'estimation dans L^∞ du gradient, de la solution. Or, dans [2] on a supposé que la composante normale de la vitesse (du flux representant le transport) s'annule sur la frontière du domaine dans lequel l'équation est considérée.

Dans le présent travail on va généraliser le résultat de [2] sur la norme dans

L^∞ du gradient de la solution de l'équation de transport linéaire au cas où la composante normale de la vitesse n'est pas nécessairement nulle; il s'agit donc du cas où il y a l'entrée et la sortie du domaine considéré. Nous allons utiliser les idées de [2], mais la présence de l'entrée nous conduit à une construction particulière d'équations approchées. Il nous semble que les hypothèses du présent travail sont suffisamment faibles (au moins par rapport à la méthode utilisée), même si nous ne pouvons pas exclure l'évetualitété d'affaiblissement des hypothèses; il nous semble que l'éventuel affaiblissement d'hypothèses exigera une nouvelle argumentation assez consistante, exigeant un nouveau travail.

Dans la deuxième partie de ce travail, en utilisant le résultat de la première partie mentionné ci-dessus, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution locale d'un système d'équations non linéaires, qui résulte d'un modèle du mouvement avec condensation et évaporation des gouttelettes d'eau produites par la condensation de la vapeur d'eau dans l'air, modèle proposé dans [10].

Les auteurs tiennent à exprimer leur vive gratitude au Prof. P. Secchi de l'université de Brescia, où une des auteurs a passé une période de stage et eu reçu de lui des conseils très utiles pour la réalisation du présent travail.

2. Position du problème linéaire

Dans la première partie du présent travail nous allons considérer une équation de transport linéaire dans un sous-ensemble ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). Pour la frontière $\partial\Omega$ de Ω, nous supposons qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$, Ω étant d'un seul côté de $\partial\Omega$, et qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in \partial\Omega$, on ait

$$x - \varepsilon\vec{n}(x) \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \tag{1}$$

où $\vec{n}(x)$ désigne la normale extérieure unitaire à la frontière $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$ (dans la suite nous écrivons simplement $n(x)$ ou n au lieu de $\vec{n}(x)$; du contexte on pourra la distinguer assez clairement de la dimension de l'espace).

On considère une fonction v définie sur $[0,\infty[\times\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$v \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)), \tag{2}$$

$$\nabla \cdot v \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega)), \tag{3}$$

où $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

La fonction v sera considérée comme le champ de vitesse qui définit le flux pour une équation de transport. Nous définissons, pour chaque $t \in [0,\infty[$, la partie d'entrée $\Gamma_-(t)$ et la partie de sortie $\Gamma_+(t)$ de la frontière $\partial\Omega$ par les relations

$$\Gamma_-(t) = \{\, x \in \partial\Omega \,|\, n(x) \cdot v(t,x) < 0 \,\}, \tag{4}$$

$$\Gamma_+(t) = \{\, x \in \partial\Omega \,|\, n(x) \cdot v(t,x) > 0 \,\}. \tag{5}$$

Dans $[0,\infty[\,\times\Omega$ nous allons considérer l'équation de transport linéaire pour une fonction inconnue u (à valeurs réelles)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot(uv)=gu+f, \tag{6}$$

où g et f sont deux fonctions données à valeurs réelles (v est la fonction introduite ci-dessus). L'équation (6) sera envisagée avec la condition initiale

$$u(0,x)=u_0(x) \quad \text{pour } x\in\Omega \tag{7}$$

et la condition d'entrée

$$u(t,x)=u_1(t,x) \quad \text{pour } (t,x)\in\bigcup_{0\leqslant t<\infty}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big], \tag{8}$$

$u_0(x)$ et $u_1(t,x)$ étant des fonctions données. On suppose la condition de compatibilité

$$u_0(x)=u_1(0,x) \quad \text{pour } x\in\Gamma_-(0). \tag{9}$$

Nous rappelons que pour le problème (6)–(8) les points où $v\cdot n$ s'annule posent des questions délicates. Pour cela, nous excluons le cas d'un saut de la valeur de $v\cdot n$ quand $v\cdot n$ change de signe et, sur les points $(t,x)\in[0,\infty[\,\times\partial\Omega$ tels que $x\in\partial\Omega\backslash(\Gamma_-(t)\cup\Gamma_+(t))$, nous supposons les conditions suivantes:

CONDITION A. Nous supposons qu'il existe deux constantes $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_0}{2}$ (ε_0 est donné dans (1)), telles que v, Dv, ∇f, ∇g, $\nabla(\nabla\cdot v)$ soient continues dans Σ_{ε_2}, où

$$\Sigma_{\varepsilon_2}=\{(t,x)\in[0,\infty[\,\times\overline{\Omega}\,|\,\mathrm{dist}\big((t,x),\Sigma\big)<\varepsilon_2\}, \tag{10}$$

$$\Sigma=\{(t,x)\in[0,\infty[\times\partial\Omega\,|\,-\varepsilon_1<v(t,x)\cdot n(x)<\varepsilon_1\}, \tag{11}$$

$$Dv=(\frac{\partial}{\partial x_i}v_j)_{i,j=1,\cdots,n}.$$

CONDITION B. Si $x_0\in\partial\Omega\backslash(\Gamma_-(t_0)\cup\Gamma_+(t_0))$, alors, quelle que soit la caractéristique γ passant par un point $(t,x)\in[0,\infty[\,\times\Omega$, on a

$$(t_0,x_0)\notin\bar{\gamma}.$$

Ici la caractéristique $\gamma=\{(\gamma_0(t),\gamma_1(t),\cdots,\gamma_n(t))\}_{t\in I_{max}}$ passant par le point $(t,x)\in[0,\infty[\,\times\Omega$ se définit par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt'}\gamma_0(t')=1, \quad \frac{d}{dt'}\gamma_j(t')=v_j(\gamma(t')), \quad j=1,\cdots,n,$$

avec la condition initiale

$$\gamma_0(t)=t, \quad \gamma_j(t)=x_j, \quad j=1,\cdots,n;$$

I_{max} est l'intervalle maximal d'existence de la solution.

Pour ce qui concerne le gradient de $u_1(t,x)$ sur $\Gamma_-(t)$, outre le gradient $\nabla_{\Gamma_-(t)}u_1$ défini de manière naturelle sur la variété de dimension $n-1$, nous défnissons la composante normale $n\cdot\nabla u_1$ par

$$(n\cdot\nabla u_1)\big|_{\Gamma_-(t)} = \frac{1}{v\cdot n}\big(-v_\tau\cdot\nabla_{\Gamma_-(t)}u_1 - \partial_t u_1 - u_1\nabla\cdot v + gu_1 + f\big), \tag{12}$$

où $v_\tau = v-(v\cdot n)n$. La nécessité de la définition (12) est motivée par le fait que, si on susbstitue $v=(v\cdot n)n+v_\tau$ dans (6), on a

$$(v\cdot n)n\cdot\nabla u = -v_\tau\cdot\nabla u - \partial_t u - u\nabla\cdot v + gu + f.$$

Dans la suite, pour ne pas alourdir l'écriture, par abus de language, nous utiliserons les notations

$$\|\nabla u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))} = \|\nabla_{\Gamma_-(t)}u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))} + \|n\cdot\nabla u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))}, \tag{13}$$

$$\|u_1\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(t))} = \|u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))} + \|\nabla u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))}, \tag{14}$$

où $n\cdot\nabla u_1$ est la fonction définie dans (12).

Sur la régularité et éventuellement sur le signe des fonctions f, g, u_0, u_1 on va les préciser dans l'énoncé des résultats.

3. Résultat principal pour l'équation linéaire

Le résultat principal de notre travail sur l'équation linéaire (6) est le suivant.

THÉORÈME 1. *On suppose que les conditions* (2), (3) *ainsi que les conditions A et B sont remplies et que, quel que soit* $\bar{t}>0$, *les fonctions* v, g, f, u_0, u_1 *vérifient les relations*

$$g\in L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega)), \qquad f\in L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega)), \qquad u_0\in W^1_\infty(\Omega), \tag{15}$$

$$v,\ \nabla_{\Gamma_-(t)}u_1,\ f-\partial_t u_1,\ g-\nabla\cdot v\in L^\infty\Big(\bigcup_{0\leqslant t<\bar{t}}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]\Big), \tag{16}$$

$$n\cdot\nabla u_1\in L^\infty\Big(\bigcup_{0\leqslant t<\bar{t}}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]\Big), \tag{17}$$

(18) u_1 *est uniformément continue sur* $\bigcup_{0\leqslant t<\bar{t}}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]$ *et*

y admet presque partout la dérivée par rapport à t, *où $1 \leqslant q \leqslant \infty$ et $n\cdot\nabla u_1$ est la composante normale du gradient de u_1 dans le sens défini par le second membre de (12). Alors il existe une fonction u et une seule appartenant à la classe*

$$L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))\cap W^1_q(0,\bar t;L^\infty(\Omega)),$$

qui vérifie l'équation (6) presque partout dans $[0,\bar t]\times\Omega$, la condition (7) presque partout dans Ω et la condition (8) presque partout sur $\bigcup_{0\leqslant t<\infty}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]$.

De plus, la fonction u vérifie l'inégalité

$$\|u\|_{L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\leqslant \max(A,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\bar t}\operatorname{ess}B(s)), \tag{19}$$

où

$$\begin{aligned}A&=e^{\bar t^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^q(0,\bar t;L^\infty(\Omega))})}\times\\&\qquad\times\big[\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\bar t^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\big],\\B(s)&=e^{(\bar t-s)^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^q(s,\bar t;L^\infty(\Omega))})}\times\\&\qquad\times\big[\|u_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))}+(\bar t-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\big];\end{aligned}$$

dans le cas $q=\infty$, on remplace $\frac{q-1}{q}$ par 1. De plus, si f, u_0 et *u_1 sont non-négatives, u est aussi non-négative.*

On remarque que, à cause du facteur $\frac{1}{v\cdot n}$ dans le deuxième membre de (12), les conditions (16) ne sont pas suffisantes pour garantir l'appartenance du second membre de (12) à $L^\infty(\Gamma_-(t))$ et pour cela nous imposons la condition (17).

Pour démontrer le théorème 1, nous allons construire les équations approchées par la régularisation des coefficients et des données et établir des estimations des solutions approchées en utilisant les caractéristiques (une méthode dont l'utilisation directe sur le problème donné est rendue problèmatique par la basse régularité de v); le passage à la limite nous donnera le résultat énoncé.

4. Préliminaires

Pour obtenir des estimations et démontrer l'existence et l'unicité de la solution, nous allons utiliser des équations approchées avec les données initiales et d'entrée approchées. Pour ce faire, nous écrivons d'abord l'équation (6) dans la forme

$$\partial_t u+v\cdot\nabla u+cu=f,\qquad c=\nabla\cdot v-g. \tag{20}$$

Construisons d'abord l'approximation des fonctions v,c,f.

On commence par prolonger les fonctions v,c,f pour $t<0$ par

$$v(t,\cdot)=0,\qquad c(t,\cdot)=c(-t,\cdot),\qquad f(t,\cdot)=0.$$

On prolonge aussi Σ_{ε_2} dans $[-1,0[\times\overline{\Omega}$ par

$$\Sigma_{\varepsilon_2} = \{(t,x) \in [-1,\infty[\times\overline{\Omega} \,|\, \mathrm{dist}\big((t,x),\Sigma\big) < \varepsilon_2\} \tag{21}$$

avec le même Σ défini dans (11) (et donc $\Sigma \subset [0,\infty[\times\partial\Omega$).

Pour $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ on pose

$$h(t,x) = \max\big(0, \min(1, 2 - \frac{3d(t,x)}{\varepsilon_2})\big),$$

où $d(t,x) = \mathrm{dist}\big((t,x), ([-1,\infty[\times\Omega)\backslash\Sigma_{\varepsilon_2}\big)$ est la distance entre le point $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $([-1,\infty[\times\Omega)\backslash\Sigma_{\varepsilon_2}$. On définit

$$\widetilde{h}(t,x) = (\zeta_{\varepsilon_h} * h)(t,x), \tag{22}$$

où ζ_{ε_h} est un noyau régularisant avec un rayon $\varepsilon_h = \frac{\varepsilon_2}{6}$ (ici la convolution est relative à (t,x)). On considère deux fonctions $\rho_\varepsilon(\cdot)$ et $\xi_\varepsilon(\cdot)$ $(0 < \varepsilon < \min(1, \frac{\varepsilon_2}{12}))$ définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement par

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\rho_1(\frac{t}{\varepsilon}), \qquad \xi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\xi_1(\frac{x}{\varepsilon}), \tag{23}$$

où

$$\rho_1(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{1-t^2}}}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-s^2}}ds} & \text{pour } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases},$$

$$\xi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}}{\int_{\{|y|<1\}} e^{-\frac{1}{1-|y|^2}}dy} & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Nous définissons dans $\mathbb{R}\times\Omega$ les fonctions

$$v_\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))v(t,x) + \widetilde{h}(t,x)\widetilde{v}_\varepsilon(t,x), \tag{24}$$

$$c_\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))c(t,x) + \widetilde{h}(t,x)\widetilde{c}_\varepsilon(t,x), \tag{25}$$

$$f_\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))f(t,x) + \widetilde{h}(t,x)\widetilde{f}_\varepsilon(t,x), \tag{26}$$

où

$$\widetilde{v}_\varepsilon(t,x) = \frac{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)v(t,y)dy}{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy} *_t \rho_\varepsilon(t),$$

$$\widetilde{c}_\varepsilon(t,x) = \frac{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)c(t,y)dy}{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy} *_t \rho_\varepsilon(t),$$

$$\widetilde{f}_\varepsilon(t,x) = \frac{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)f(t,y)dy}{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy} *_t \rho_\varepsilon(t),$$

et $*_t$ désigne la convolution par rapport à t.

Nous définissons aussi dans Ω

(27) $$u_0^\varepsilon(x) = (1-\widetilde{h}(0,x))u_0(x) + \widetilde{h}(0,x)\widetilde{u}_0^\varepsilon(x),$$

où

$$\widetilde{u}_0^\varepsilon(x) = \frac{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)u_0(y)dy}{\int_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy}.$$

En ce qui concerne la donnée d'entrée u_1, qui est définie sur $\bigcup_{0\leqslant t<\infty}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]$, pour la commodité de notation, nous la prolongeons par 0 sur $(t,x)\in[0,\infty[\times\partial\Omega$ tels que $x\notin\Gamma_-(t)$ (en réalité ce prolongement n'intervient pas dans nos raisonnements grâce au choix $0<\varepsilon<\min(1,\frac{\varepsilon_2}{12})$, mais peut faciliter l'écriture); on prolonge $u_1(t,x)$ aussi sur $[-1,0[\times\partial\Omega$ par 0. Cela étant, on définit

$$\overline{u}_1^\varepsilon(t,x) = \frac{\int_{\partial\Omega} \xi_\varepsilon(x-y)u_1(t,y)dS_y}{\int_{\partial\Omega} \xi_\varepsilon(x-y)dS_y},$$

(28) $$u_1^\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))(u_1(\cdot,x) *_t \rho_\varepsilon(\cdot))(t) + \widetilde{h}(t,x)(\overline{u}_1^\varepsilon(\cdot,x) *_t \rho_\varepsilon(\cdot))(t).$$

Les fonctions $c_\varepsilon, v_\varepsilon, f_\varepsilon, u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ étant bien définies, on considère l'équation pour la fonction inconnue u^ε

(29) $$\partial_t u^\varepsilon + v_\varepsilon\cdot\nabla u^\varepsilon + c_\varepsilon u^\varepsilon = f_\varepsilon + u_0^\varepsilon\rho_\varepsilon(t) \quad \text{dans } [-1,\infty[\times\Omega,$$

avec la condition initiale

(30) $$u^\varepsilon(-1,\cdot) = 0 \quad \text{sur } \Omega,$$

et la condition d'entrée

(31) $$u^\varepsilon(\cdot,\cdot) = u_1^\varepsilon(\cdot,\cdot) \quad \text{sur } \{(t,x)\in[-1,\infty[\times\partial\Omega \,|\, x\in\Gamma_-^\varepsilon(t)\},$$

où

$$\Gamma_-^\varepsilon(t) = \{x\in\partial\Omega \,|\, v_\varepsilon(t,x)\cdot n(x) < 0\};$$

le choix de $\varepsilon \in]0, \min(1, \frac{\varepsilon_2}{12})[$, de v_ε et de u_1^ε (voir (23), (24), (28)) nous garantit que $\Gamma_-^\varepsilon(t) = \Gamma_-(t)$ pour $t \geqslant 0$ et que, si $u_1^\varepsilon(t,x) \neq 0$, alors $x \in \Gamma_-^\varepsilon(t)$.

Nous allons considérer le problème (29)–(31) comme problème approché de (6)–(8).

Comme v_ε est une fonction suffisamment régulière, pour tout $(t,x) \in]-1,\infty[\times\Omega$ il existe l'unique caractéristique $\gamma = \gamma^\varepsilon$ telle que $(t,x) \in \gamma$. Cette caractéristique $\gamma = (\gamma_0, \widetilde{\gamma})$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, est définie par les équations différentielles

$$\frac{d}{dt'}\gamma_0(t') = 1, \quad \frac{d}{dt'}\widetilde{\gamma}(t') = v_\varepsilon(t', \widetilde{\gamma}(t')) = v_\varepsilon(\gamma(t')) \tag{32}$$

avec les conditions initiales

$$\gamma_0(t) = t, \quad \widetilde{\gamma}(t) = x$$

Si on pose

$$s = \inf\{t' < t \,|\, \gamma(t') \in]-1,\infty[\times\Omega\}, \tag{33}$$

alors, en tenant compte que $\{x \in \partial\Omega \,|\, n(x)\cdot v_\varepsilon(s,x) < 0\} = \Gamma_-^\varepsilon(s)$, on a ou "$s = -1$ et $\widetilde{\gamma}(s) \in \Omega$" ou "$s > -1$ et $\widetilde{\gamma}(s) \in \Gamma_-^\varepsilon(s)$" (dans ce dernier cas on a nécessairement $s > -\varepsilon$); le cas "$s = -1$ et $\widetilde{\gamma}(s) \in \Gamma_-^\varepsilon(-1)$" est exclu par le choix $\varepsilon < 1$. Dans tous les cas la solution u^ε peut être exprimée par la solution de l'équation différentielle sur la caractéritique. Plus précisément, $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\gamma(\cdot))$ est la solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}u^\varepsilon + c_\varepsilon u^\varepsilon = f_\varepsilon + u_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(t) \tag{34}$$

sur $\gamma = \gamma^\varepsilon$ avec la condition initiale

$$u^\varepsilon(s) = \begin{cases} u_1^\varepsilon(\gamma(s)) & \text{si} \quad s > -1 \\ 0 & \text{si} \quad s = -1 \end{cases}. \tag{35}$$

On remarque que, si $f \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$, alors $f_\varepsilon \geqslant 0$, $u_0^\varepsilon \geqslant 0$, $u_1^\varepsilon \geqslant 0$ et donc la solution u^ε de (34) sera elle aussi non-négative.

Nous donnons un lemme technique.

LEMME 1. *Soient $\gamma = \gamma^\varepsilon$ une caractéristique définie par* (32) *et s l'instant défini par* (33)*. Si on pose*

$$\lambda_\varepsilon(s) = \int_{-1}^{s} \rho_\varepsilon(t')dt',$$

on a, pour tout $t > s$,

$$\int_s^t \rho_\varepsilon(t')|u_0^\varepsilon(\gamma(t'))|dt' \leqslant (1 - \lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{36}$$

$$|u_1^\varepsilon(s,x)| \leqslant \lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde{h}(s,x)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} + \tag{37}$$

$$+(1-\tilde{h}(s,x))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\Big),$$

où $[\tau]^+ = \max(\tau,0)$ *(ici* u_1 *se considère prolongée par* 0 *pour* $(t,x)\in[-1,\infty[\times\partial\Omega$ *tels que* $x\notin\Gamma_-(t)$*).*

Démonstration. On a

$$\int_s^t \rho_\varepsilon(t')|u_0^\varepsilon(\gamma(t'))|dt' \leqslant \int_s^t \rho_\varepsilon(t')dt'\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)},$$

d'où, compte tenu de la relation $\int_s^t \rho_\varepsilon(t')dt' \leqslant 1-\lambda_\varepsilon(s)$, on obtient (36).

D'autre part, on a

$$|(u_1(\cdot,x) *_t \rho_\varepsilon(\cdot))(s)| \leqslant \int_{\max(0,s-\varepsilon)}^{\max(0,s+\varepsilon)} |u_1(t',x)|\rho_\varepsilon(s-t')dt' \leqslant$$

$$\leqslant \|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\lambda_\varepsilon(s);$$

analoguement on a

$$|(\overline{u}_1^\varepsilon(\cdot,x) *_t \rho_\varepsilon(\cdot))(s)| \leqslant \|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\lambda_\varepsilon(s).$$

De ces inégalités et de (28) on déduit (37), ce qui achève la démonstration. □

5. Estimation des solutions approchées sur les caractéristiques

L'estimation de la solution approchée u^ε et de son gradient sur les caractéristiques $\gamma=\gamma^\varepsilon$, qui joue le rôle central pour la démonstration du théorème 1, est donnée par le lemme suivant.

LEMME 2. *Sur chaque caractéristique* $\gamma=\gamma^\varepsilon$*, la solution* u^ε *du problème approché* (29)–(31) *vérifie les inégalités*

(38) $$|u^\varepsilon(t)| \leqslant \Big(\lambda_\varepsilon(s)\big[\tilde{h}(s)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}+$$

$$+(1-\tilde{h}(s))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big]+(1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)e^{\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t |c_\varepsilon(t')|dt'}+$$

$$+\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t |f_\varepsilon(t')|e^{\int_{t'}^t |c_\varepsilon(t'')|dt''}dt',$$

(39) $$|\nabla u^\varepsilon(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\lambda_\varepsilon(s)\big[\tilde h(s)\|\nabla\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}+(1-\tilde h(s))\|\nabla u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}+$$

$$+|\nabla\tilde h(s)|\|\overline{u}_1^\varepsilon-u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big]+(1-\lambda_\varepsilon(s))\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)e^{\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t\omega_\varepsilon(t')dt'}+$$

$$+\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t\big(|\nabla f_\varepsilon(t')|+|u^\varepsilon(t')||\nabla c_\varepsilon(t')|\big)e^{\int_{t'}^t\omega_\varepsilon(t'')dt''}dt'.$$

où $\omega_\varepsilon(t)=\max_{i,j=1,\cdots,n}|\delta_{ij}c_\varepsilon+\partial_{x_i}v_{\varepsilon,j}|$ *et* $\tilde h(s)=\tilde h(\gamma(s))$.

On précise que, comme dans l'énoncé du théorème 1, dans (39) la composante normale de ∇u_1 est donnée dans (12) (si $v\cdot n<0$) et celle de $\nabla\overline{u}_1^\varepsilon$ est définie de manière analogue (voir (43) en bas pour son expression explicite). On précise aussi que dans les seconds membres de ces inégalités on considère u_1 prolongée par 0 sur $[0,\infty[\times\partial\Omega\setminus\bigcup_{0\leqslant t<\infty}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]$ comme nous l'avons posé dans la section 4.

Démonstration. Rappelons que la solution u^ε du problème (29)–(31) peut être construite par la solution du problème de Cauchy (34)–(35) sur chaque caractéristique $\gamma=\gamma^\varepsilon$. Comme l'équation (34) est linéaire, on obtient immédiatement, si $\gamma(s)\in\partial\Omega$ (et donc $s>-\varepsilon$),

$$|u^\varepsilon(t)|\leqslant|u_1^\varepsilon(\gamma(s))|e^{\int_s^t|c_\varepsilon(t')|dt'}+\int_s^t|f_\varepsilon(t')+u_0^\varepsilon(\gamma(t'))\rho_\varepsilon(t')|e^{\int_{t'}^t|c_\varepsilon(t'')|dt''}dt',$$

et, si $\gamma(s)=\gamma(-1)\in\Omega$ (et donc $s=-1$),

$$|u^\varepsilon(t)|\leqslant\int_{-\varepsilon}^t|f_\varepsilon(t')+u_0^\varepsilon(\gamma(t'))\rho_\varepsilon(t')|e^{\int_{t'}^t|c_\varepsilon(t'')|dt''}dt'.$$

D'après le lemme 1, on en déduit l'inégalité (38).

Concernant la deuxième inégalité, en dérivant par rapport à x_i les deux membres de l'équation (29) et en posant $w_i^\varepsilon=\partial_{x_i}u^\varepsilon$, $L_{\varepsilon,i}=\partial_{x_i}f_\varepsilon-u^\varepsilon\partial_{x_i}c_\varepsilon$ et $w_{0,i}^\varepsilon=\partial_{x_i}u_0^\varepsilon$ pour $i=1,\cdots,n$, on obtient

$$\partial_t w_i^\varepsilon+v_\varepsilon\cdot\nabla w_i^\varepsilon+\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}c_\varepsilon+\partial_{x_i}v_{\varepsilon,j})w_j^\varepsilon=L_{\varepsilon,i}+w_{0,i}^\varepsilon\rho_\varepsilon(t)\quad\text{dans}[-1,\bar t]\times\Omega. \tag{40}$$

On considère cette équation avec la condition initiale

$$w_i^\varepsilon(-1,\cdot)=0\quad\text{sur}\quad\Omega \tag{41}$$

et la condition d'entrée

$$w_i^\varepsilon(\cdot,\cdot)=\partial_{x_i}u_1^\varepsilon\quad\text{sur}\quad[-1,\bar t]\times\partial\Omega. \tag{42}$$

On précise que dans (42) w_i^ε désigne la i-ième composante du gradient ∇u_1^ε composé par sa composante tangentielle qui est le gradient (naturel) $\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1^\varepsilon$ sur la variété $\Gamma_-(t)$ et la composante normale définie par

$$(43)\quad (n\cdot\nabla u_1^\varepsilon)\big|_{\Gamma_-(t)} = \frac{1}{v_\varepsilon\cdot n}\big(-v_{\tau,\varepsilon}\cdot\nabla_{\Gamma_-(t)}u_1^\varepsilon - \partial_t u_1^\varepsilon - u_1^\varepsilon\nabla\cdot v_\varepsilon + g_\varepsilon u_1^\varepsilon + f_\varepsilon + u_0^\varepsilon\rho_\varepsilon\big),$$

où $v_{\tau,\varepsilon} = v_\varepsilon - (v_\varepsilon\cdot n)n$.

Sur chaque caractéristique $\gamma = \gamma^\varepsilon$ l'équation (40) se réduit à l'équation différentielle ordinaire

$$(44)\qquad \frac{d}{dt}w_i^\varepsilon + \sum_{j=1}^n(\delta_{ij}c_\varepsilon + \partial_{x_i}v_{\varepsilon,j})w_j^\varepsilon = L_{\varepsilon,i} + w_{0,i}^\varepsilon\rho_\varepsilon(t),\quad i = 1,\cdots,n.$$

On pose

$$W^\varepsilon(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^\varepsilon(t)^2}.$$

En multipliant les deux membres de (44) par w_i^ε et en faisant la somme de ces équations, on obtient

$$(45)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(W^\varepsilon(t))^2 = -\sum_{i,j=1}^n(\delta_{ij}c_\varepsilon + \partial_{x_i}v_{\varepsilon,j})w_j^\varepsilon w_i^\varepsilon + \sum_{i=1}^n L_{\varepsilon,i}w_i^\varepsilon + \rho_\varepsilon(t)\sum_{i=1}^n w_{0,i}^\varepsilon w_i^\varepsilon;$$

cette équation différentielle ordinaire sur une caractéristique γ doit être envisagée avec la condition initiale

$$W^\varepsilon(s) = |\nabla u_1^\varepsilon(\gamma(s))| \equiv \overline{W}_s^\varepsilon,\quad \text{pour}\quad s\in[-1,\bar{t}],$$

où s est défini par (33) et $\nabla u_1^\varepsilon(\gamma(s))$ doit être entendu dans le sens précisé après (42).

Si on pose

$$\omega_\varepsilon(t) = \max_{i,j=1,\ldots,n}|\delta_{ij}c_\varepsilon + \partial_{x_i}v_{\varepsilon,j}|,$$
$$L_\varepsilon = (L_{\varepsilon,1},\cdots,L_{\varepsilon,n}),$$

de l'égalité (45) on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(W^\varepsilon(t))^2 \leqslant \omega_\varepsilon(t)(W^\varepsilon(t))^2 + |L_\varepsilon(t)|W^\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t)W^\varepsilon(t)\sqrt{\sum_{i=1}^n(w_{0,i}^\varepsilon(\gamma(t)))^2}.$$

Donc, pour tout $\delta > 0$, on a

$$(W^\varepsilon(t))^2 \leqslant Y_\delta(t),\quad \text{pour} t \geqslant s,$$

où $Y_\delta(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$(46)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}Y_\delta(t) = \omega_\varepsilon(t)Y_\delta(t) + |L_\varepsilon(t)|\sqrt{Y_\delta(t)} + \rho_\varepsilon(t)\sqrt{Y_\delta(t)}\sqrt{\sum_{i=1}^n(w_{0,i}^\varepsilon(\gamma(t)))^2},$$

$$Y_\delta(s) = (\overline{W}^\varepsilon_s + \delta)^2. \tag{47}$$

Or, comme $Y_\delta(t)$ est strictement positive, pour tout $t \geqslant s$, on peut diviser les deux membres de (46) par $\sqrt{Y_\delta(t)}$, de sorte que l'on a

$$W^\varepsilon(t) \leqslant y_\delta(t) \quad \text{pour} t \geqslant s,$$

où $y_\delta(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt} y_\delta(t) = \omega_\varepsilon(t) y_\delta(t) + |L_\varepsilon(t)| + \rho_\varepsilon(t) \sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t)))^2},$$

$$y_\delta(s) = \overline{W}^\varepsilon_s + \delta.$$

Comme $y_\delta(t)$ tend vers

$$y(t) = \overline{W}^\varepsilon_s e^{\int_s^t \omega_\varepsilon(t')dt'} + \int_s^t (|L_\varepsilon(t')| + \rho_\varepsilon(t') \sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t')))^2}) e^{\int_{t'}^t \omega_\varepsilon(t'')dt''} dt',$$

quand $\delta \to 0$, on a

$$W^\varepsilon(t) \leqslant \overline{W}^\varepsilon_s e^{\int_s^t \omega_\varepsilon(t')dt'} + \int_s^t (|L_\varepsilon(t')| + \rho_\varepsilon(t') \sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t')))^2}) e^{\int_{t'}^t \omega_\varepsilon(t'')dt''} dt'.$$

D'après le lemme 1 on a

$$\int_s^t \rho_\varepsilon(t') \sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t')))^2} dt' \leqslant (1 - \lambda_\varepsilon(s)) \|\nabla u^\varepsilon_0\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$\overline{W}^\varepsilon_s \leqslant \lambda_\varepsilon(s) \big(\tilde{h}(s) \|\nabla \overline{u}^\varepsilon_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+] \times \partial\Omega)} + (1 - \tilde{h}(s)) \|\nabla u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+] \times \partial\Omega)} + \\ + |\nabla \tilde{h}(s)| \|\overline{u}^\varepsilon_1 - u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+] \times \partial\Omega)}\big).$$

Comme l'intégrale $\int_s^t \cdot dt'$ peut être remplacée par $\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t \cdot dt'$ (voir la définition de $\overline{W}^\varepsilon_s$, $L_\varepsilon(t)$, $\rho_\varepsilon(t)$), on en déduit l'inégalité (39). $\square$

6. Démonstration du théorème 1

Démonstration. On pose

$$\Lambda_\varepsilon(t) = e^{\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t (e^{\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t (|c_\varepsilon(t'')| + |Dv_\varepsilon(t'')|)dt''} |\nabla c_\varepsilon(t')| + |c_\varepsilon(t')| + |Dv_\varepsilon(t')|)dt'} \times$$

$$\times\big[\lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde{h}(s)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))}+$$
$$+(1-\tilde{h}(s))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))}+$$
$$+|\nabla\tilde{h}(s)|\|\overline{u}_1^\varepsilon-u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big)+$$
$$+(1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\int\limits_{\max(-\varepsilon,s)}^{t}\big(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|\big)dt'\big].$$

En faisant la somme de (38) et (39) sur chaque caractéristique $\gamma=\gamma^\varepsilon$ et en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$|u^\varepsilon(t)|+|\nabla u^\varepsilon(t)|\leqslant\Lambda_\varepsilon(t). \tag{48}$$

D'autre part, si on pose $s_\varepsilon=[s]^++\varepsilon$ et si on considère r_1 et r_2 tels que $s_\varepsilon\leqslant r_1<r_2\leqslant t$, alors, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 5.1, on a

$$|u^\varepsilon(r_2)|\leqslant e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}|c_\varepsilon(t')|dt'}\big(|u^\varepsilon(r_1)|+\int\limits_{r_1}^{r_2}|f_\varepsilon(t')|dt'\big),$$

$$|\nabla u^\varepsilon(r_2)|\leqslant e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}\omega_\varepsilon(t')dt'}\big(|\nabla u^\varepsilon(r_1)|+\int\limits_{r_1}^{r_2}(|\nabla f_\varepsilon(t')|+|u^\varepsilon(t')||\nabla c_\varepsilon(t')|)dt'\big)$$

et par conséquent

$$|u^\varepsilon(r_2)|+|\nabla u^\varepsilon(r_2)|\leqslant e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}(e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}(|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'}|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'}\times$$
$$\times\big(|u^\varepsilon(r_1)|+|\nabla u^\varepsilon(r_1)|+\int\limits_{r_1}^{r_2}(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\big).$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $(r_1,r_2)\in[s_\varepsilon,t]\times[s_\varepsilon,t]$ avec $r_1<r_2$, d'après le lemme 4.3 de [2], on a

$$|u^\varepsilon(t)|+|\nabla u^\varepsilon(t)|\leqslant e^{\int\limits_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'}\times \tag{49}$$
$$\times\big(|u^\varepsilon(s_\varepsilon)|+|\nabla u^\varepsilon(s_\varepsilon)|+\int\limits_{s_\varepsilon}^{t}(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\big).$$

En tenant compte que l'inégalité (48) est vérifiée aussi pour $t=s_\varepsilon$, de (49) on peut déduire

$$|u^\varepsilon(t)|+|\nabla u^\varepsilon(t)|\leqslant e^{\int\limits_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'}\times \tag{50}$$

$$\times\big(\Lambda_\varepsilon(s_\varepsilon)+\int_{s_\varepsilon}^{t}(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\big).$$

Si on examine l'expression de $\Lambda_\varepsilon(s_\varepsilon)$, on peut déduire de (50) qu'il existe deux fonctions continues $\nu_1(\cdot)$ et $\nu_2(\cdot)$ définies sur $[0,\min(1,\frac{\varepsilon_2}{12})]$ telles que $\nu_1(0)=\nu_2(0)=0$ et que

$$|u^\varepsilon(t)|+|\nabla u^\varepsilon(t)|\leqslant e^{\int_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'}\times \tag{51}$$

$$\times\big(e^{\nu_1(\varepsilon)}\big[\lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde h(s)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))}+$$

$$+(1-\tilde h(s))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))}+$$

$$+|\nabla\tilde h(s)|\|\overline{u}_1^\varepsilon-u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big)+(1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{W^1_\infty(\Omega)}\big]+$$

$$+\int_{s_\varepsilon}^{t}(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\big)+\nu_2(\varepsilon).$$

Compte tenu de la relation $\lambda_\varepsilon(s)\alpha+(1-\lambda_\varepsilon(s))\beta\leqslant\max(\alpha,\beta)$ pour $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$ et des définitions de $\overline{u}_1^\varepsilon$, u_0^ε, f_ε ($\|\overline{u}_1^\varepsilon-u_1\|_{L^\infty}\to0$ pour $\varepsilon\to0$ grâce à (18)), on déduit que le second membre de (51) est majoré par

$$e^{\nu_1(\varepsilon)}\max(\widetilde{A}(t),\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\operatorname{ess}\widetilde{B}(t;s))+\nu_2(\varepsilon), \tag{52}$$

où

$$\widetilde{A}(t)=e^{\int_0^t(\|c(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\big(\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\int_0^t\|f(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}dt'\big),$$

$$\widetilde{B}(t;s)=e^{\int_s^t(\|c(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\big(\|u_1\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))}+\int_s^t\|f(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}dt'\big).$$

Cela étant, on remarque que $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))$, ce qui, en vertu de (29), implique que $\{\partial_t u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^q(0,\bar t;L^\infty(\Omega))$. Par conséquent, il existe une suite $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ et une fonction $u\in L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))\cap W^1_q(0,\bar t;L^\infty(\Omega))$ telles que $\varepsilon_j\to0$ pour $j\to\infty$, u^{ε_j} et ∇u^{ε_j} convergent faiblement-$*$ vers u et ∇u dans $L^\infty([0,\bar t]\times\Omega)$ et $\partial_t u^{\varepsilon_j}$ converge faiblement vers $\partial_t u$ dans $L^q(0,\bar t;L^\infty(\Omega))$ (dans le cas $q=1$, en établissant d'abord (54), on peut procéder de manière analogue à la démonstration du point (b) du lemme 4.4 de [2]). Donc, en faisant tendre ε_j vers 0 dans (52), on obtient

$$\|u(t)\|_{W^1_\infty(\Omega)}\leqslant\max(\widetilde{A}(t),\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\operatorname{ess}\widetilde{B}(t;s)). \tag{53}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder aux intégrales dans l'expression de $\widetilde{A}$ et de $\widetilde{B}$ et en rappelant la définition de $c(t)$, on parvient à (19).

De plus, u^{ε_j} vérifie, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^1([-1,\bar{t}] \times \overline{\Omega})$ telle que

$$\varphi(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad ([-1,0] \times \Gamma_+(0)) \cup \Big(\bigcup_{0<t\leqslant\bar{t}} (\{t\} \times \Gamma_+(t))\Big) \cup (\{\bar{t}\} \times \overline{\Omega}),$$

l'égalité

$$\int_{-1}^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} [u^{\varepsilon_j}(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_{\varepsilon_j}\cdot\nabla\varphi + (\nabla\cdot v_{\varepsilon_j})\varphi - c_{\varepsilon_j}\varphi) + f_{\varepsilon_j}\varphi + u_0^{\varepsilon_j}\rho_{\varepsilon_j}(t)\varphi]dx =$$

$$= \int_{-1}^{\bar{t}} \int_{\partial\Omega} u_1^{\varepsilon_j}\varphi(t,x)dtdS.$$

En passant à la limite pour $\varepsilon_j \to 0$, on a

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_\Omega [u(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\cdot\nabla\varphi + g\varphi) + f\varphi]dx = \int_0^{\bar{t}} \int_{\Gamma_-(t)} (v\cdot n)u_1\varphi dSdt - \int_\Omega u_0\varphi(0,x)dx. \tag{54}$$

Comme dans (54) φ est arbitraire dans la classe indiquée, on peut affirmer que u vérifie l'équation (6) et les conditions (7)-(8) presque partout dans les domaines relatifs.

Si $u^{[1]}$ et $u^{[2]}$ sont deux solutions du problème (6)-(8), alors $U = u^{[2]} - u^{[1]}$ satisfait à l'équation (6) avec $f = 0$ et avec les conditions initiale et d'entrée nulles, de sorte que, compte tenu que $v\cdot n > 0$ sur $\Gamma_+(t)$, par le produit scalaire de l'équation (6) avec U même, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+(t)} |U|^2 v\cdot ndS + \int_\Omega (g - \frac{1}{2}(\nabla\cdot v))|U|^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \|(g - \frac{1}{2}(\nabla\cdot v))\|_{L^\infty(\Omega)}\|U\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où, compte tenu de la condition $\|U\|^2_{L^2(\Omega)}\big|_{t=0} = 0$, on obtient $\|U\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, ce qui démontre l'unicité de la solution du problème (6)-(8).

En outre, si $f \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$, alors, u^{ε_j} étant elles aussi non-négatives, en passant à la limite, on a $u \geqslant 0$.

□

REMARQUE 1. De manière analogue à la démonstration du théorème 1, on peut donner une estimation de u et une de son gradient ∇u dans la norme L^∞ par les inégalités ci-dessous

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \max(A_1(t), \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mathrm{ess} B_1(t;s)) \quad \forall t \in [0,\bar{t}], \tag{55}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \max(A_2(t), \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \operatorname{ess} B_2(t;s)) \quad \forall t \in [0,\bar{t}], \tag{56}$$

où

$$A_1(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} [\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} dt'],$$

$$B_1(t;s) = e^{\int_s^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} [\|u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))} + \int_s^t \|f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} dt'],$$

$$A_2(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} \big(\|\nabla u_0\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+ \int_0^t (\|\nabla f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u(t')\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla(g - \nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big),$$

$$B_2(t;s) = e^{\int_s^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} \big(\|\nabla u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))} +$$

$$+ \int_s^t (\|\nabla f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u(t')\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla(g - \nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big).$$

COROLLAIRE 1. *Soient u une fonction qui vérifie l'égalité (54) et u' une autre fonction qui vérifie la même égalité où v, g, f, u_0 et u_1 sont remplacées par v', g', f', u_0' et u_1' respectivement avec la condition $v\cdot n = v'\cdot n$ sur $[0,\bar{t}] \times \partial\Omega$. Alors pour tout $t \in [0,\bar{t}]$ on a*

$$\|u(t) - u'(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \max\big(A^*(t), \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mathit{ess}\, B^*(t;s)\big) \tag{57}$$

et, dans le cas où $u_1 = u_1'$, on a

$$\|u(t) - u'(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant A^*(t), \tag{58}$$

où

$$A^*(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} \big[\|u_0 - u_0'\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+ \int_0^t (\|f(t') - f'(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t') - v'(t')\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+ \|(\nabla\cdot v - g)(t') - (\nabla\cdot v' - g')(t')\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big],$$

$$B^*(t;s) = e^{\int_s^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} \big[\|u_1(s) - u_1'(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))} +$$

$$+\int_s^t (\|f(t')-f'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(t')-v'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|(\nabla\cdot v-g)(t')-(\nabla\cdot v'-g')(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big].$$

Démonstration. Comme $u-u'$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial(u-u')}{\partial t}+\nabla\cdot((u-u')v)=g(u-u')+(f-f')-(v-v')\cdot\nabla u'+$$

$$-[(\nabla\cdot v-g)-(\nabla\cdot v'-g')]u',$$

en appliquant (55) à $u-u'$, on obtient (57).

Dans le cas où $u_1=u_1'$, on voit aisément que $B^*(s)\leqslant A^*$, d'où (58). □

Montrons maintenant une variante du théorème 1. En utilisant les notations $\Omega^+=\Omega\times]0,+\infty[$, $\widetilde{\nabla}=(\nabla,\partial_m)=(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n},\partial_m)$ et $\widetilde{v}=(v,v_m)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, on considère le problème

(59) $$\partial_t u+\widetilde{\nabla}\cdot(u\widetilde{v})=gu+f \qquad \text{dans} \quad [0,\bar{t}]\times\Omega^+,$$

(60) $$u(0,x,m)=u_0(x,m) \qquad \text{dans} \quad \Omega^+,$$

(61) $$u(t,x,m)=u_1(t,x,m) \qquad \text{sur} \quad \bigcup_{0\leqslant t\leqslant\bar{t}}\{t\}\times\widetilde{\Gamma}_-(t),$$

où $\widetilde{\Gamma}_-(t)=\{(x,m)\in\partial\Omega\times]0,\infty[\,|\,n(x)\cdot v(t,x,m)<0\}$. On suppose que les conditions A, B, (16), (17) et (18) sont vérifiées avec les modifications formelles consistant au remplacement de Σ_{ε_2} par

$$\widetilde{\Sigma}_{\varepsilon_2}=\{(t,x,m)\in[0,\infty[\times\overline{\Omega}\times[0,\infty[\,|\ \mathrm{dist}\big((t,x,m),\widetilde{\Sigma}\big)<\varepsilon_2\}$$

avec

$$\widetilde{\Sigma}=\{(t,x,m)\in[0,\infty[\times\partial\Omega\times]0,\infty[\,|-\varepsilon_1<v(t,x,m)\cdot n(x)<\varepsilon_1\},$$

de $\Gamma_-(t_0)\cup\Gamma_+(t_0)$ par $\widetilde{\Gamma}_-(t_0)\cup\widetilde{\Gamma}_+(t_0)$ (avec $\widetilde{\Gamma}_+(t_0)$ défini de la manière naturelle), de la caractéristique γ par la caractéristique $\widetilde{\gamma}$ définie de la manière naturelle dans $[0,\infty[\times\Omega^+$ et de $L^\infty\big(\bigcup_{0\leqslant t\leqslant\bar{t}}[\{t\}\times\Gamma_-(t)]\big)$ par $L^\infty\big(\bigcup_{0\leqslant t\leqslant\bar{t}}[\{t\}\times\widetilde{\Gamma}_-(t)]\big)$. Pour ce problème on a l'affirmation suivante.

COROLLAIRE 2. *Soit $\bar{t}>0$ (arbitraire). On suppose que*

(62) $$\widetilde{v}\in L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+;\mathbb{R}^{n+1})), \qquad \widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{v}\in L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+)),$$

(63) $$g,f\in L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+)), \qquad u_0\in W^1_\infty(\Omega^+),$$

(64) $$v_m(t,x,m)=0 \quad si \ \ m\in]0,m_0[\cup]M_0,\infty[,$$

(65) $$u_0(x,m) = 0 \quad si \;\; m \in]0, m_0[\cup]M_0, \infty[$$

(66) $$u_1(t,x,m) = 0 \quad si \;\; (x,m) \in \widetilde{\Gamma}_-(t) \;\; et \;\; m \in]0, m_0[\cup]M_0, \infty[,$$

(67) $$f(t,x,m) = 0 \quad si \;\; m \in]0, m_0[\cup]M_0, \infty[,$$

où $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *et* $M_0 > m_0 > 0$. *Alors le problème* (59)–(61) *admet une solution u et une seule dans* $L^\infty(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega^+)) \cap W^1_q(0,\bar{t}; L^\infty(\Omega^+))$*; l'estimation* (19) *reste valable en remplaçant* Ω, ∇, v *par* Ω^+, $\widetilde{\nabla}$, $\tilde{v}$ *respectivement et on a* $\mathrm{supp}\, u(t,x,\cdot) \subseteq [m_0, M_0]$ *pour tout* $(t,x) \in [0,\bar{t}] \times \Omega$. *De plus, si* f, u_0 *et* u_1 *sont non-négatives alors u l'est aussi.*

Démonstration. La condition (64) implique que les trajectoires qui passent par une partie de $\Omega \times [m_0, M_0]$ restent toujours dans $\Omega \times [m_0, M_0]$, ce qui nous permet de procéder, dans le domaine $\Omega \times]m_0 - \varepsilon, M_0 + \varepsilon[$ (avec un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit), de manière toute analogue au raisonnement de la démonstration du théorème 1.

D'autre part pour $m \notin [m_0, M_0]$, le problème (59)–(61) se réduit à

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nabla \cdot (uv) &= gu && \text{dans} \quad [0,\bar{t}] \times \Omega, \\ u(0,x) &= 0 && \text{dans} \quad \Omega, \\ u(t,x) &= 0 && \text{sur} \quad \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant \bar{t}} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big], \end{aligned}$$

ce qui implique que $u = 0$ dans $\Omega \times (]0, m_0[\cup]M_0, \infty[)$. □

On pourrait affaiblir la condition sur le support des fonctions sur $[m_0, M_0]$, mais dans ce travail nous nous limitons à cette version de variante, que nous allons utiliser dans la section suivante.

De manière analogue à la démonstration du corollaire 1, on peut avoir une inégalité similaire à (58) pour deux solutions u et u' du problème (59)–(61) avec les conventions de notation analogues au cas (58)

(68) $$\|u(t) - u'(t)\|_{L^\infty(\Omega^+)} \leqslant \widetilde{A}^*(t),$$

où

$$\widetilde{A}^*(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} + \|(\widetilde{\nabla}\cdot\tilde{v})(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)})dt'} \big[\|u_0 - u_0'\|_{L^\infty(\Omega^+)} +$$

$$+ \int_0^t (\|f(t') - f'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} + \|\tilde{v}(t') - \tilde{v}'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} \|\widetilde{\nabla} u'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} +$$

$$+ \|(\widetilde{\nabla} \cdot \tilde{v} - g)(t') - (\widetilde{\nabla} \cdot \tilde{v}' - g')(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} \|u'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)}) dt'\big].$$

7. Application à un système d'équations quasi-linéaire issu de la modélisation de l'atmosphère.

Nous allons étudier un système d'équations quasi-linéaires, qui correspond à une partie du système d'équations du modèle du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau proposé dans [10] (voir aussi [4]). Nous considérons notre système d'équations pour les fonctions inconnues $\rho(t,x)$, $\pi(t,x)$, $\sigma(t,x,m)$ dans $\Omega^+ = \Omega\times\,]0,\infty[$ où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ ($t \in [0,\bar{t}]$, $x \in \Omega$, $m > 0$); les fonctions $\rho(t,x)$, $\pi(t,x)$, $\sigma(t,x,m)$ représenteraient, dans le modèle de l'atmosphère, la densité de l'air sec, la densité de la vapeur d'eau et la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m respectivement. Plus précisément, en désignant par $v(t,x)$ la vitesse de l'air (c'est-à-dire, vitesse pour ρ et π) et par $w(t,x,m)$ la vitesse des gouttelettes d'eau (c'est-à-dire, vitesse pour σ), nous considérons le système d'équations

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho v) = 0, \tag{69}$$

$$\partial_t\pi + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(\pi,\sigma), \tag{70}$$

$$\partial_t\sigma + \nabla\cdot(\sigma w) + \partial_m(mh_{gl}\sigma) + S_0(\pi,\sigma)\sigma = S_1(\pi,\sigma), \tag{71}$$

où

$$H_{gl}(\pi,\sigma) = (\pi - \bar{\pi}_{vs})\int_0^\infty s(m)\sigma(m)dm,$$

$$h_{gl}(\pi;m) = s(m)(\pi - \bar{\pi}_{vs}),$$

$$S_0(\pi,\sigma) = -h_{gl} + g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{vs}]^- + m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m')dm',$$

$$S_1(\pi,\sigma) = g_0(m)\tilde{P}(\sigma)[\pi - \bar{\pi}_{vs}]^+ + \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m,m-m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm',$$

$\bar{\pi}_{vs} \in L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))$, $s, g_1, g_0 \in W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$, $\beta \in W^1_\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$, $s \geqslant 0$, $g_0 \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, tandis que $\widetilde{P}(\cdot)$ est un opérateur lipschitzien défini sur $W^1_\infty(\Omega^+)$ à valeurs dans $W^1_\infty(\Omega)$ tel que $\widetilde{P}(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \geqslant 0$; nous supposons que $1 \leqslant q \leqslant \infty$ et qu'il y a deux constantes m_a, M_a telles que $0 < m_a < M_a < \infty$ et que

$$\beta(m',m'') = 0 \quad \text{si } m'+m'' \geqslant M_a, \qquad \operatorname{supp} g_0 \subset [m_a, M_a].$$

Du point de vue du modèle du phénomène physique, $\bar{\pi}_{vs}$ représenterait la densité de la vapeur saturée (qui dépend sensiblement de la température), $s(m)(\pi - \bar{\pi}_{vs})$ la quantité de la condensation ou évaporation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes d'eau de masse m (exprimée par rapport à l'unité de masse) et donc $H_{gl}(\pi,\sigma)$ serait la quantité totale de la condensation ou évaporation; $g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_{vs}]^-$ devrait représenter le taux de disparition de gouttelettes de masse m (avec m proche de m_a), tandis que $g_0(m)\tilde{P}(\sigma)[\pi - \bar{\pi}_{vs}]^+$

serait le taux de création de gouttelettes de masse m; la fonction $\beta(m,m')$ désigne le taux de coagulation d'une gouttelette de masse m et d'une de masse m' (pour les détails du modèle, voir [10]).

Nous considérons le système (69)–(71) avec les conditions initiales

$$\rho(0,\cdot) = \rho_0 \in W^1_\infty(\Omega), \quad \rho_0 \geqslant 0, \tag{72}$$

$$\pi(0,\cdot) = \pi_0 \in W^1_\infty(\Omega), \quad \pi_0 \geqslant 0, \tag{73}$$

$$\sigma(0,\cdot) = \sigma_0 \in W^1_\infty(\Omega^+), \quad \sigma_0 \geqslant 0, \quad \operatorname{supp}\sigma_0(x,\cdot) \subset [m_a, M_a] \ \forall x \in \Omega, \tag{74}$$

et les conditions d'entrée

$$\rho|_{\Gamma_-^{(v)}(t)} = \rho_1, \quad \rho_1 \geqslant 0, \tag{75}$$

$$\pi|_{\Gamma_-^{(v)}(t)} = \pi_1, \quad \pi_1 \geqslant 0, \tag{76}$$

$$\sigma|_{\widetilde{\Gamma}_-^{(w)}(t)} = \sigma_1, \quad \sigma_1 \geqslant 0, \tag{77}$$

$$\operatorname{supp}\sigma_1(t,\cdot,\cdot) \subset \partial\Omega \times [m_a, M_a] \ \ \forall t \in [0,\bar{t}],$$

où $\Gamma_-^{(v)}(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n(x)\cdot v(t,x) < 0\}$, $\widetilde{\Gamma}_-^{(w)}(t) = \{(x,m) \in \partial\Omega \times]0,\infty[\,|\, n(x)\cdot w(t,x,m) < 0\}$. On suppose que les conditions A, B, (16), (17) et (18) sont vérifiées pour $u_1 = \rho_1$ et $u_1 = \pi_1$ en remplaçant $\Gamma_-(t)$ par $\Gamma_-^{(v)}(t)$ et pour $u_1 = \sigma_1$ en remplaçant v par w et $\Gamma_-(t)$ par $\widetilde{\Gamma}_-^{(w)}(t)$ (et avec des modifications formelles évidentes comme dans le corollaire 2). On suppose aussi que

$$v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)), \qquad \nabla\cdot v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \tag{78}$$

$$w \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega^+;\mathbb{R}^3)), \qquad \nabla\cdot w \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega^+)). \tag{79}$$

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses posées ci-dessus, il existe un* $t^* \in]0,\bar{t}]$ *tel que le système d'équations* (69)–(71) *avec les conditions initiales* (72)–(74) *et les conditions d'entrée* (75)–(77) *admette dans l'intervalle de temps* $[0,t^*]$ *une solution* (ρ,π,σ) *et une seule telle que*

$$\rho,\, \pi \in L^\infty(0,t^*; W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_q(0,t^*; L^\infty(\Omega)),$$

$$\sigma \in L^\infty(0,t^*; W^1_\infty(\Omega^+)) \cap W^1_q(0,t^*; L^\infty(\Omega^+));$$

et on a $\rho \geqslant 0$, $\pi \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$ *et*

$$\operatorname{supp}\sigma(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \qquad \forall (t,x) \in [0,t^*] \times \Omega.$$

L'équation (69) étant linéaire, l'existence et l'unicité de la solution résultent du lemme 3 montré ci-dessous. En ce qui concerne les équations non linéaires (70) et (71), on examine d'abord les équations linéarisées et puis on cherche un point fixe d'un opérateur défini par la solution de ces équations.

On considère deux fonctions données $\overline{\pi}$ et $\overline{\sigma}$ et le système des équations

$$\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho v)=0, \tag{80}$$

$$\partial_t\pi+\nabla\cdot(\pi v)=-H_{gl}(\pi,\overline{\sigma}), \tag{81}$$

$$\partial_t\sigma+\nabla\cdot(\sigma w)+\partial_m(mh_{gl}(\overline{\pi})\sigma)+S_0(\overline{\pi},\overline{\sigma})\sigma=S_1(\overline{\pi},\overline{\sigma}), \tag{82}$$

qui est le système linéarisé de (69)–(71).

LEMME 3. *Si $\overline{\pi}\in L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))$ et $\overline{\sigma}\in L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+))$, alors il existe une solution (ρ,π,σ) et une seule du système (80)–(82) avec les conditions initiales (72)–(74) et les conditions d'entrée (75)–(77), solution dans la classe*

$$\rho,\pi\in L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))\cap W^1_q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega)),$$

$$\sigma\in L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+))\cap W^1_q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega^+));$$

de plus, si $\overline{\pi}$ et $\overline{\sigma}$ sont non négatives, alors ρ, π et σ sont aussi non négatives. En outre, il existe une constante $C>0$ indépendante de v, w telle que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\leqslant\max\big(A_\rho,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\bar{t}}\operatorname{ess}B_\rho(s)\big), \tag{83}$$

$$\|\pi\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\leqslant\max\big(A_\pi,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\bar{t}}\operatorname{ess}B_\pi(s)\big), \tag{84}$$

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+))}\leqslant\max\big(A_\sigma,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\bar{t}} essB_\sigma(s)\big), \tag{85}$$

où

$$A_\rho=e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dv\|_{L^q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\right)}\|\rho_0\|_{W^1_\infty(\Omega)},$$

$$B_\rho(s)=e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dv\|_{L^q(s,\bar{t};L^\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\right)}\|\rho_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-^{(v)}(s))},$$

$$A_\pi=e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dv\|_{L^q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\right)}\times$$

$$\times e^{C\bar{t}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+))}}\big[\|\pi_0\|_{W^1_\infty(\Omega)}+C\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+))}\big],$$

$$B_\pi(s)=e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dv\|_{L^q(s,\bar{t};L^\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\right)+C(\bar{t}-s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega^+))}}\times$$

$$\times[\|\pi_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma^{(v)}_-(s))} + C(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}} \|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))}],$$

$$A_\sigma = e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dw\|_{L^q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega+))}+\|\nabla\cdot w\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))}+C\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\right)}\times$$

$$\times e^{C\bar{t}\left(\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))}\right)}[\|\sigma_0\|_{W^1_\infty(\Omega+)} + C\big((\bar{t}^{\frac{q-1}{q}} \|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} +$$

$$+\bar{t}\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} + \bar{t}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))})(1+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))})\big)],$$

$$B_\sigma(s) = e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dw\|_{L^q(s,\bar{t};L^\infty(\Omega+))}+\|\nabla\cdot w\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))}+C\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}\right)}\times$$

$$\times e^{C(\bar{t}-s)\left(\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))}\right)}[\|\sigma_1(s)\|_{W^1_\infty(\tilde{\Gamma}^{(w)}_-(s))}+$$

$$+C\big(((\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}} \|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} + (\bar{t}-s)\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+$$

$$+(\bar{t}-s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))})(1+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))})\big)].$$

De plus, si on a

$$\operatorname{supp}\overline{\sigma}(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \;\text{ pourtout}(t,x) \in [0,\bar{t}] \times \Omega$$

alors

$$\operatorname{supp}\sigma(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \;\text{ pourtout}(t,x) \in [0,\bar{t}] \times \Omega.$$

Démonstration. On considère l'équation (69) avec la condition initiale (72) et la condition d'entrée (75); afin d'appliquer le théorème 1 on prend

$$u = \rho, \quad u_0 = \rho_0, \quad u_1 = \rho_1, \quad f = 0, \quad g = 0;$$

d'après l'inégalité (19) on obtient l'inégalité (83).

On considère maintenant l'équation (70) avec la condition initiale (73) et la condition d'entrée (76); pour appliquer le théorème 1 on prend

$$u = \pi, \quad u_0 = \pi_0, \quad u_1 = \pi_1,$$

$$g = -\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}(m)dm, \quad f = \overline{\pi}_{vs}\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}(m)dm.$$

En vertu des conditions posées sur $\overline{\pi}_{vs}$ et $s(m)$, on voit qu'il existe une constante positive c_1 telle que

$$\|g\|_{W^1_\infty(\Omega)} \leqslant c_1 \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega+)}$$

et

$$\|f\|_{W^1_\infty(\Omega)} \leqslant c_1 \|\overline{\pi}_{vs}\|_{W^1_\infty(\Omega)} \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega+)}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a, pour $0 \leqslant s < \bar{t}$,

$$(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}} \|g\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} \leqslant C(\bar{t}-s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega+))}$$

et

$$(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))} \leqslant C(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}$$

avec une constante C. Donc, d'après l'inégalité (19), on obtient (84).

On considère maintenant l'équation (71) avec la condition initiale (74) et la condition d'entrée (77) et on prend

$$u = \sigma, \quad u_0 = \sigma_0, \quad u_1 = \sigma_1, \quad v = w, \quad v_m = mh_{gl}(\overline{\pi}),$$

$$g = -S_0(\overline{\pi},\overline{\sigma}), \quad f = S_1(\overline{\pi},\overline{\sigma}).$$

En vertu des conditions posées sur $\overline{\pi}_{vs}$, $s(m)$, g_0, g_1, β, $\widetilde{P}$, on constate qu'il existe une constante positive c_2 telle que

$$\|g\|_{W^1_\infty(\Omega^+)} \leqslant c_2(\|\overline{\pi}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\pi}_{vs}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}),$$

$$\|f\|_{W^1_\infty(\Omega^+)} \leqslant c_2(\|\overline{\pi}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\pi}_{vs}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)})(1 + \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|g\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))} \leqslant C\big((\bar t - s)(\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))} + \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))})+$$

$$+(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\big)$$

et

$$(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))} \leqslant C\big((\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))} + (\bar t - s)\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+$$

$$+(\bar t - s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}\big)\big(1 + \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}\big)$$

avec une constante C. D'après le corollaire 2, on en déduit (85).

Pour la dernière assertion du lemme, on remarque que, si $\operatorname{supp}\overline{\sigma}(t,x,\cdot) \subseteq [m_a,M_a]$ pour tout $(t,x) \in [0,\bar t] \times \Omega$, alors $\operatorname{supp} f(t,x,\cdot) \subseteq [m_a,M_a]$ pour tout $(t,x) \in [0,\bar t] \times \Omega$, donc le résultat découle immédiatement en appliquant le corollaire 2. □

Pour utiliser le lemme 3 pour la démonstration du théorème 2, nous introduisons

$$\Lambda_{[\pi]}(t) = 2\max\big(\|\pi_0\|_{W^1_\infty(\Omega)}, \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \operatorname{ess}\|\pi_1\|_{W^1_\infty(\Gamma_-^{(v)}(s))}\big) + 1, \tag{86}$$

$$\Lambda_{[\sigma]}(t) = 2\max(\|\sigma_0\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}, \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \operatorname{ess}\|\sigma_1\|_{W^1_\infty(\widetilde{\Gamma}_-^{(w)}(t))}) + 1. \tag{87}$$

Alors on a le lemme suivant.

LEMME 4. *Il existe un* $t_1 \in]0,\bar{t}]$ *tel que, si* $\overline{\pi}$ *et* $\overline{\sigma}$ *appartiennent à* $L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega))$ *et* $L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega^+))$ *respectivement, sont non-négatives et vérifient les inégalités*

$$\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega))} \leqslant \Lambda_{[\pi]}(t_1), \qquad \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega^+))} \leqslant \Lambda_{[\sigma]}(t_1), \tag{88}$$

alors la solution (ρ,π,σ) *du système* (80)–(82) *avec les conditions initiales* (72)–(74) *et les conditions d'entrée* (75)–(77) *vérifie les inégalités*

$$\|\pi\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega))} \leqslant \Lambda_{[\pi]}(t_1), \qquad \|\sigma\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega^+))} \leqslant \Lambda_{[\sigma]}(t_1) \tag{89}$$

et on a

$$\operatorname{supp}\sigma(t,x,\cdot) \subseteq [m_a,M_a] \quad \forall (t,x) \in [0,t_1] \times \Omega. \tag{90}$$

Démonstration. On voit que, si on choisit $\bar{t}$ suffisamment petit, dans (84) et (85) le deuxième membre peut être inférieur à $\Lambda_{[\pi]}(\bar{t})$ et à $\Lambda_{[\sigma]}(\bar{t})$ respectivement, ce qui nous permet de déduire (89) sous la condition (88). La relation (90) découle immédiatement du lemme 3. □

Démonstration du théorème 2. Soit $t \in]0,t_1]$, où t_1 est donné dans le lemme 4. Nous définissons le sous-ensemble F_t de $L^\infty(]0,t] \times \Omega) \times L^\infty(]0,t] \times \Omega^+)$ par la relation : $(\pi,\sigma) \in F_t$ si et seulement si (π,σ) vérifie les conditions

$$\begin{cases} \pi \in L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega)), \;\; \sigma \in L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega^+)), \\ \pi,\sigma \geqslant 0, \\ \operatorname{supp}\sigma(t',x,\cdot) \subseteq [m_a,M] \; \forall (t',x) \in [0,t] \times \Omega, \\ \|\pi\|_{L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega))} \leqslant \Lambda_{[\pi]}(t), \\ \|\sigma\|_{L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega^+))} \leqslant \Lambda_{[\sigma]}(t). \end{cases}$$

On considère, pour tout $t \in]0,t_1]$, l'opérateur $G_t : F_t \to L^\infty(]0,\bar{t}] \times \Omega) \times L^\infty(]0,\bar{t}] \times \Omega^+)$ tel que $G_t(\overline{\pi},\overline{\sigma}) = (\pi,\sigma)$, où (π,σ) est la solution du système (81)–(82) avec les conditions initiales (73)–(74) et les conditions d'entrée (76)–(77).

En vertu du lemme 4 on a

$$G_t(F_t) \subset F_t \quad \forall t \in]0,t_1].$$

Donc, pour démontrer le théorème 2, il suffit de démontrer qu'il existe un t^*, $0 < t^* \leqslant t_1$, tel que l'opérateur G_{t^*} restreint à F_{t^*} soit une contraction.

Pour $i \in \{1,2\}$ on considère $(\overline{\pi}^{(i)},\overline{\sigma}^{(i)}) \in F_t$ et $(\pi^{(i)},\sigma^{(i)}) = G_t(\overline{\pi}^{(i)},\overline{\sigma}^{(i)})$. Nous posons

$$\overline{\Pi} = \overline{\pi}^{(2)} - \overline{\pi}^{(1)}, \quad \overline{\Sigma} = \overline{\sigma}^{(2)} - \overline{\sigma}^{(1)},$$
$$\Pi = \pi^{(2)} - \pi^{(1)}, \quad \Sigma = \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}.$$

Comme $\pi^{(1)} = \pi_1 = \pi^{(2)}$ sur $\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant t_1} \big[\{t\} \times \Gamma_-^{(v)}(t)\big]$, en appliquant l'inégalité (58) à

$$u = \pi^{(2)}, \quad u' = \pi^{(1)}, \quad v = v', \quad u_0 = u'_0 = \pi_0, \quad u_1 = u'_1 = \pi_1,$$

$$g = -\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(2)}(m)dm, \qquad g' = -\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(1)}(m)dm,$$

$$f = \overline{\pi}_{vs}\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(2)}(m)dm, \qquad f' = \overline{\pi}_{vs}\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(1)}dm,$$

on obtient, en vertu du lemme 4 et de la définition de F_t,

(91) $$\|\Pi\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} \leqslant A_\Pi,$$

où

(92) $$A_\Pi = Ce^{t^{\frac{q-1}{q}}\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,t;L^\infty(\Omega))}+Ct\Lambda_{[\sigma]}(t)}\times$$
$$\times\|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\big[t\Lambda_{[\pi]}(t)+t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,t;W^1_\infty(\Omega))}\big].$$

D'autre part, pour estimer Σ, utilisons les notations

$$\overline{C}_\beta = \sup_{m,m'>0}(m+m')\beta(m,m'), \quad \overline{C}_s = \|s\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+)},$$

$$\overline{C}_{g1} = \sup_{m>0} g_1(m), \quad \overline{C}_{g0} = \sup_{m>0} g_0(m).$$

Alors, comme $\sigma^{(1)} = \sigma_1 = \sigma^{(2)}$ sur $\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_1}\big[\{t\}\times\widetilde{\Gamma}^{(w)}_-(t)\big]$, en appliquant l'inégalité (68) à

$$u = \sigma^{(2)}, \quad u' = \sigma^{(1)}, \quad u_0 = u'_0 = \sigma_0, \quad u_1 = u'_1 = \sigma_1,$$
$$g = S_0(\overline{\pi}^{(2)},\overline{\sigma}^{(2)}), \quad g' = S_0(\overline{\pi}^{(1)},\overline{\sigma}^{(1)}), \quad f = S_1(\overline{\pi}^{(2)},\overline{\sigma}^{(2)}), \quad f' = S_1(\overline{\pi}^{(1)},\overline{\sigma}^{(1)}),$$
$$\widetilde{v} = (w, mh_{gl}(\overline{\pi}^{(2)})), \quad \widetilde{v}' = (w, mh_{gl}(\overline{\pi}^{(1)})),$$

on obtient

(93) $$\|\Sigma\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)} \leqslant A_\Sigma,$$

où

(94)
$$A_\Sigma = e^{t^{\frac{q-1}{q}}\|\nabla\cdot w\|_{L^q(0,t;L^\infty(\Omega^+))}+((2+M_a)\overline{C}_s+\overline{C}_{g1})[t\Lambda_{[\pi]}(t)+t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,t;W^1_\infty(\Omega))}]+\overline{C}_\beta t\Lambda_{[\sigma]}(t)}\times$$
$$\times\big\{\overline{C}_{g0}\big[\overline{C}_P\|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\big(t\Lambda_{[\pi]}(t)+t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,t;W^1_\infty(\Omega))}\big)+$$
$$+t\overline{C}_P(\Lambda_{[\sigma]}(t)+1)\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)}\big]+$$
$$+t\big[(2(1+M_a)\overline{C}_s+\overline{C}_{g1})\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)}+2M_a\overline{C}_\beta\|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\big]\Lambda_{[\sigma]}(t)\big\},$$

$\overline{C}_P$ étant une constante due à l'opérateur lipschitzien $\widetilde{P}(\cdot)$.

L'estimation de Π et celle de Σ étant établies, on va raisonner séparément pour le cas $q > 1$ et le cas $q = 1$.

Dans le cas $q > 1$, des relations (91)–(94) on déduit qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\|\Pi\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\Sigma\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 e^{C_1(t^{\frac{q-1}{q}}+t)}\big(t^{\frac{q-1}{q}}+t\big)\big(\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\big) \qquad \forall t \in [0,t_1].$$

Donc, si on choisit $t^* \in]0,t_1]$ de telle sorte que

$$0 < C_1 e^{C_1((t^*)^{\frac{q-1}{q}}+t^*)}\big((t^*)^{\frac{q-1}{q}}+t^*\big) < 1$$

alors G_{t^*} sera une contraction.

D'autre part, si $q = 1$, on remarque que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $t_\varepsilon^* > 0$ tel que

$$\|\nabla\cdot v\|_{L^1(0,t_\varepsilon^*;L^\infty(\Omega))} \leqslant \varepsilon, \qquad \|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^1(0,t_\varepsilon^*;W^1_\infty(\Omega))} \leqslant \varepsilon, \qquad \|\nabla\cdot w\|_{L^1(0,t_\varepsilon^*;L^\infty(\Omega^+))} \leqslant \varepsilon.$$

Cela étant, si on examine les expressions (92) et (94) de A_Π et de A_Σ, on constate qu'on peut choisir un $t^* > 0$ suffisamment petit de telle sorte que l'inégalité

$$\|\Pi\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\Sigma\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)} \leqslant \kappa\big(\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\big)$$

soit vérifiée avec un $\kappa < 1$. Donc G_{t^*} sera une contraction.

Ainsi on a montré que dans tous les deux cas $q > 1$ et $q = 1$ il existe un $t^* > 0$ tel que G_{t^*} soit une contraction. Donc il existe le point fixe $(\pi,\sigma) \in F_{t^*}$ (unique dans F_{t^*}) pour l'opérateur G_{t^*}. En rappelant que la solution ρ de l'équation (80) est donnée dans le lemme 3, on constate que (ρ,π,σ) ainsi obtenu est une solution du système (69)–(71) avec les conditions mentionnées en haut.

La non-négativité de ρ, de π et de σ résulte des conditions $s \geqslant 0$, $g_0 \geqslant 0$, $\widetilde{P}(\sigma) \geqslant 0$ pour tout $\sigma \geqslant 0$, comme dans le théorème 1 et le corollaire 2. □

References

[1] AMBROSIO L., *Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158** (2004), 227–260.

[2] ASCOLI D. AND SELVADURAY S., *Wellposedness in the Lipschitz class for a quasi-linear hyperbolic system arising from a model of the atmosphere including water phase transitions*, NoDEA **21** (2014), 263–287.

[3] BARDOS C., *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d'approximation; application à l'équation de transport*, Annales E.N.S. série IV **3** (1970), 185–233.

[4] BENSSAAD M., BELHIRECHE H., SELVADURAY S. C., *Equation system describing the radiation intensity and the air motion with the water phase transition*, To appear in Hokkaido Math. J.

[5] BOYER F., *Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation*, Diff. Int. Eq. **18** (2005), 891–934.

[6] CRIPPA G., DONADELLO C., SPINOLO L. V., *Initial-boundary value problems for continuity equations with BV coefficients*, J. Math. Pures Appl. **102** (2014), 79–98.

[7] DIPERNA R.J. AND LIONS P.-L., *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511–547.

[8] PLOTNIKOV P. AND SOKOŁOWSKI J., *Compressible Navier-Stokes equations; theory and shape optimization*, Springer, Basel 2012.

[9] SECCHI P., *A symmetric positive system with nonuniformly characteristic boundary*, Diff. Int. Eq. **11** (1998), 605–621.

[10] SELVADURAY S.C. AND FUJITA YASHIMA H., *Equazioni del moto dell'aria e transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido*, Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V **35** (2011), 37–69.

AMS Subject Classification: 35L04 , 35F61, 35Q35.

Imane BAZINE,
Département de Mathématiques , Université 8 Mai 1945 Guelma
BP 401, 24000 Guelma, ALGERIE
e-mail: `bazine.imane@univ-guelma.dz, bazine.imane@gmail.com`

Davide ASCOLI,
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Via Carlo Alberto, 10, 10123 Torino, ITALIA
e-mail: `davide.ascoli@unito.it`

Hisao FUJITA YASHIMA,
Département de Mathématiques, École Normale Supérieure Assia Djebar de Constantine
Ville Universitaire, Ain El Bey Ali Mendjeli, 25000 Constantine, ALGERIE
e-mail: `hisaofujitayashima@qq.com`

Lavoro pervenuto in redazione il 16-10-17.