Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 50, 3 (1992)

M. Bekkar – T. Sari

SURFACES MINIMALES REGLEES DANS L'ESPACE DE HEISENBERG $\mathbb{H}_3$

Résumé. On donne la description de toutes les surfaces minimales réglées par des droites de l'espace de Heisenberg $\mathbb{H}_3$. On en déduit que les plans, les hélicoïdes et le paraboloïde hyperbolique sont, à isométrie prè de $\mathbb{H}_3$, les seules surfaces minimales réglées par des droites qui sont des géodésiques de $\mathbb{H}_3$.

Abstract. We give a descritpion of ruled minimal surfaces by straight lines of the Heisenberg space $\mathbb{H}_3$. We deduce that planes, helicoïds and the hyperbolic paraboloïd are, up to isometry of $\mathbb{H}_3$, the only minimal surfaces of $\mathbb{H}_3$ which are ruled by straight lines which are geodesics of $\mathbb{H}_3$.

1. Introduction

1.1. L'espace de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ est l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \omega^2, \text{ où } \omega = dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy\,.$$

Son groupe d'isométries est de dimension quatre. La composante connexe de l'identité est le groupe qu'on notera G des transformations affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ A & B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où θ, a, b, c sont des réels et

$$A = \frac{1}{2}(a\sin\theta - b\cos\theta) \quad , \quad B = \frac{1}{2}(a\cos\theta + b\sin\theta).$$

Dans la suite les éléments de G seront notés par $(\theta; a, b, c)$. Le groupe G contient les rotations $(\theta; O, O, O)$ de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe (Oz); il contient aussi les translations à gauche $(O; a, b, c)$ de l'espace de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ consideré comme groupe de Lie nilpotent, pour lequel la métrique ds^2 est invariante à gauche. Plus précisemment le groupe G est un produit semi-direct $SO(2)\alpha\mathbb{H}_3$.

1.2. Nous allons déterminer les surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ qui sont réglées par des droites qui sont des géodésiques de $\mathbb{H}_3$.

Rappelons (voir [H]) que la géodésique $\Gamma(t)$ issue du point $m = (x(0), y(0), z(0))$ de $\mathbb{H}_3$ et tangente au vecteur $v = (\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$ appartenant à $T_m\mathbb{H}_3$ est une droite dans les deux cas suivants:

- Lorsque v est vertical, c'est à dire quand $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Dans ce cas la géodésique $\Gamma(t)$ est la droite verticale d'équations:

$$x(t) = x(0)\,,\; y(t) = y(0)\,,\; z(t) = z(0) + \dot{z}(0).t$$

- Lorsque v est dans le noyau de la forme de Pfaff ω, c'est à dire lorsque $\dot{z} + \frac{1}{2}y(0)\dot{x}(0) - \frac{1}{2}x(0)\dot{y}(0) = 0$.

Dans ce cas la géodésique $\Gamma(t)$ est la droite d'équations:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \dot{x}(0).t \\ y(t) = y(0) + \dot{y}(0).t \\ z(t) = z(0) + \dfrac{1}{2}(x(0).\dot{y}(0) - y(0).\dot{x}(0)).t \end{cases}$$

La forme de Pfaff ω est une forme de contact de $\mathbb{R}^3$. Elle définit par ses noyaux une distribution non intégrable F de $\mathbb{R}^3$ appelée distribution de contact. La géodésique $\Gamma(t)$ est une courbe intégrale de la distribution F; on l'appelle alors une droite géodésique de contact.

Remarquons que le feuilletage de $\mathbb{H}_3$ par les droites verticales est totalement géodésique, il est invariant par le groupe G. De même la distribution F est totalement géodésique et invariante par G.

1.3. Nous obtenons dans cette note les deux résultats suivants:

– Les seules surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées par des droites géodésiques verticales sont des morceaux de plans verticaux.

– Les seules surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées par des droites géodésiques de contact sont, à isométries près de $\mathbb{H}_3$, des morceaux de plans, des morceaux d'helicoïdes $z = \gamma$ arctg(x/y) avec γ réel, ou des morceaux du paraboloïde hyperbolique $z = xy/2$. Ce résultat a été annoncé dans la note [B] dans laquelle est établie l'équation des surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ qui sont des graphes de fonctions $z = f(x,y)$. Certaines solutions particulkières de cette équation sont données dans [B], en particulier, on y montre que la surface $z = a(x) - \dfrac{xy}{2}$ avec

$$a(x) = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{Log}(x + \sqrt{1+x^2})\Big)$$

est minimale dans $\mathbb{H}_3$; cette surfaces admet comme paramétrisation:

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = a(t) - \dfrac{t \cdot s}{2}\,. \end{cases}$$

Elle est donc réglée par la droite L_t de vecteur directeur $(0,1,-t)$ passant par le point $(t,0,a(t))$. La droite L_t n'est pas une géodésique de $\mathbb{H}_3$. Dans la note [B] on trouve aussi d'autres exemples de surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées par des droites qui ne sont pas géodésiques.

Dans cet article on propose alors une description de toutes les surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées pas des droites qui ne sont pas nécessairement des géodésiques de $\mathbb{H}_3$. Cependant, dans ce dernier cas la description proposée n'est pas complète dans le sens que les surfaces obtenue dépendent de fonctions arbitraires qui sont solutions d'équations différentielles qui ne sont pas résolues explicitement (voir Théorème 4.)

2. Surfaces minimales réglées par des droites géodésiques.

2.1. Considérons la surface Σ de $\mathbb{H}_3$ définie par l'application

$$(t,s) \longmapsto m(t,s) = U(t) + s\,V(t) \text{ avec } U(t) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } V(t) \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}\,.$$

Cette surface Σ est réglée par la droite L_t, passant par le point $U(t)$ et de vecteur directeur $V(t)$.

La courbe $t \mapsto U(t)$ est appelée la directrice de Σ.

Moyennant une isométrie de $\mathbb{H}_3$ et un choix approprié de la directrice $U(t)$ on peut se ramener localement à l'un des deux cas suivants:

$$U(t) = (t, 0, a(t)) \qquad \text{et} \qquad V(t) = (u(t), 1, v(t))$$

ou bien

$$U(t) = (t, a(t), 0) \qquad \text{et} \qquad V(t) = (0, 0, 1)\,.$$

En effet le premier cas correspond à une surface Σ dont la trace sur au moins un plan vertical est le graphe d'une fonction. On choisit cette courbe comme directrice de Σ et il suffit de la ramener sur le plan $y = 0$, par une isométrie de $\mathbb{H}_3$, pour obtenir la paramétrisation considérée. Sont exclues alors les surfaces Σ qui rencontrent tous les plans verticaux le long de droites verticales et qui correspondent au deuxième cas considéré. Dans la deuxième paramétrisation la directrice de Σ est sa trace sur le plan $z = 0$; une rotation autour de $(0z)$ permet de se ramener au cas où cette directrice est définie localement comme le graphe d'une fonction $y = a(x)$. Nous commençons par l'étude de ce deuxième cas.

2.2. La surface Σ est paramétrisée localement par

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = a(t) \\ z(t,s) = s\,. \end{cases}$$

La première et la deuxième forme fondamentale de cette surface sont

$$\mathrm{I} = E dt^2 + 2F dt ds + G ds^2$$
$$\mathrm{II} = L dt^2 + 2M dt ds + N ds^2$$

où les coefficients E, F, G, L, M, N sont respectivement

$$E = 1 + a'^2 + \frac{1}{4}(a - t.a')^2,\ F = \frac{1}{2}(a - t.a'),\ G = 1$$
$$L = a'' - \frac{1}{2}(a - t.a')(1 + a'^2),\ M = -\frac{1}{2}(1 + a'^2),\ N = 0$$

où les primes désignent la dérivation par rapport à t.

La condition de minimalité $EN + GL - 2FM = 0$ conduit à l'équation $a'' = 0$, c'est à dire $a(t) = \lambda t + \mu, \lambda, \mu$ réels. Autrement dit la surface Σ est un plan vertical. Ainsi nous avons démontré le

THÉORÈME 1. *Le seules surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées par des droites verticales sont des morceaux de plans verticaux.*

2.3. Revenons au premier cas. Supposons que les droites L_t sont des droites géodésiques de contact. On a alors $v(t) = t/2$ et la surface Σ est paramétrisée localement par

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} x(t,s) = t + s.u(t) \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = a(t) + \dfrac{ts}{2} \end{cases} .$$

L'équation $x(t,s) = t+yu(t)$ définit implicitement $t = t(x,y)$ en fonction de x et y. Par conséquent la surface Σ est localement le graphe d'une fonction $z = f(x,y)$ avec

$$f(x,y) = a(t(x,y)) + yt(x,y)/2 .$$

On sait (voir [B]) que cette surface est minimale si la fonction f vérifie l'équation

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_{xx}\left[1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right] - 2f_{xy}\left(f_y - \frac{x}{2}\right)\left(f_x + \frac{y}{2}\right) + \\ + f_{yy}\left[1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right] = 0 . \end{aligned}$$

Partant des définitions des fonctions $t(x,y)$ et $f(x,y)$ on obtient

$$\begin{cases} t_x = \dfrac{1}{1+yu'} \quad , \quad t_y = \dfrac{-u}{1+yu'} = -ut_x \\ f_x = \left(a' + \dfrac{y}{2}\right) t_x \, , \quad f_y = \left(a' + \dfrac{y}{2}\right) t_y + \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

où l'indice désigne la dérivation par rapport à la variable en indice et les primes la dérivation par rapport à la variable t.

En dérivant de nouveau par rapport à x et y on obtient

$$(2)\qquad \begin{cases} f_{xx} = a'' t_x^2 + (a' + y/2) t_{xx} \\ f_{xy} = \dfrac{1}{2} t_x + a'' t_x t_y + (a' + y/2) t_{xy} \\ f_{yy} = t_y + a'' t_y^2 + (a' + y/2) t_{yy} \end{cases}$$

avec

$$t_{xx} = -\frac{y u''}{(1 + y u')^3}, t_{xy} = -u' t_x^2 - u t_{xx}\,,\ t_{yy} = 2 u u' t_x^2 + u^2 t_{xx}\,.$$

En tenant compte de la relation $f_y - \dfrac{x}{2} = -u\left(f_x + \dfrac{y}{2}\right)$, l'équation (1) des surfaces minimales devient

$$f_{xx} + f_{yy} + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 [u^2 f_{xx} + 2u f_{xy} + f_{yy}] = 0\,.$$

Un calcul simple montre que l'expression $u^2 f_{xx} + 2u f_{xy} + f_{yy}$ est identiquement nulle de sorte que l'équation des surfaces minimales $z = f(x, y)$ de $\mathbb{H}_3$ s'écrit

$$(3)\qquad f_{xx} + f_{yy} = 0\,.$$

Par conséquent nous avons établi le

THÉORÈME 2. *Les surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées par des droites géodésiques de contact sont localement des graphes de fonctions harmoniques (sauf au voisinage des points où elles contiennent une droite verticale).*

2.4. Déterminons maintenant les fonctions u et a pour que l'équation (3) soit satisfaite. Les expressions (2) portées dans cette équation conduisent à:

$$-\frac{1}{2} y^2 [u''(1 + u^2)] + y[u'(a''(1 + u^2) + 2uu'a' - u) - u''(1 + u^2) a'] \\ + [a''(1 + u^2) + 2uu'a' - u] = 0\,.$$

Ce polynôme du second degré en y s'annule lorsque ses coefficients s'annulent identiquement ce qui équivaut au système de deux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} u'' = 0 \\ a''(1 + u^2) + 2uu'a' - u = 0\,. \end{cases}$$

La première équation donne $u(t) = \alpha t + \beta$ avec α, β réels.

La deuxième équation s'écrit $(a'(1+u^2))' = u$, soit donc:

$$a'(1+u^2) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \nu \quad \text{avec } \nu \in \mathbb{R}\,.$$

Finalement on obtient les solutions suivantes

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{t}{2\alpha} + \gamma \operatorname{Arctg}(\alpha t + \beta) + \delta && \text{si } \alpha \neq 0 \\ a(t) &= \frac{\beta}{2(1+\beta^2)} t^2 + \gamma t + \delta && \text{si } \alpha = 0 \end{aligned}$$

d'où les fonctions f correspondantes

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{x - \beta y}{2\alpha} + \gamma \operatorname{Arctg} \frac{\alpha x + \beta}{\alpha y + 1} + \delta && \text{si } \alpha \neq 0 \\ f_2(x,y) &= \frac{(x-\beta y)(y + \beta x)}{2(1+\beta^2)} + \gamma(x - \beta y) + \delta && \text{si } \alpha = 0\,. \end{aligned}$$

Considérons l'isométrie $(0; \beta/\alpha, 1/\alpha, -\delta)$, elle transforme la surface $z = f_1(x,y)$ en la surface $z = \gamma \operatorname{Arctg}(x/y)$ qui est un plan si $\gamma = 0$ et un hélicoïde si $\gamma \neq 0$. Cet hélicoïde peut être globalement paramétrisé par

$$\begin{cases} x(t,s) = s \sin t \\ y(t,s) = s \cos t \\ z(t,s) = \gamma t\,. \end{cases}$$

Cette paramétrisation représente une droite horizontale L_t de vecteur directeur $(\sin t, \cos t, 0)$ et passant par le point $(0, 0, \gamma t)$ de l'axe $(0z)$. Par conséquent les surfaces minimales représentées localement par $z = f_1(x,y)$ sont à isométrie près de $\mathbb{H}_3$ des morceaux de plans ou des morceux d'hélicoïdes.

En ce qui concerne les surfaces minimales représentées localement par l'équation $z = f_2(x,y)$, l'isométrie $(\operatorname{Arctg} \beta; 0, \gamma\sqrt{1+\beta^2}, -\delta)$ permet de les transformer en un morceau du paraboloïde hyperbolique $z = xy/2$. Par conséquent nous avons démontré le

THÉORÈME 3. *Les seules surfaces minimales de* $\mathbb{H}_3$ *réglées par des droites géodésiques de contact sont, à isométrie près de* $\mathbb{H}_3$*, des morceaux de plans, des morceaux d'hélicoïdes où des morceuax du paraboloïde hyperbolique.*

3. Surfaces minimales réglées par des droites.

3.1. Le cas des surfaces réglées par des droites quelconques est plus délicat car il y a trois fonctions inconnues $a(t)$, $u(t)$ et $v(t)$ à déterminer pour que la surface Σ paramétrisée localement par

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} x(t,s) = t + su(t) \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = a(t) + s\,v(t) \end{cases}$$

soit minimale.

Comme dans le paragraphe précédent on voit que la surface Σ est localement le graphe d'une fonction $z = f(x,y)$ avec

$$f(x,y) = a(t(x,y)) + y\,v(t(x,y))\,.$$

En dérivant par rapport aux variables x et y on obtient

$$f_x = (a' + yv')t_x\,,\, f_y = (a' + yv')t_y + v$$
$$\begin{cases} f_{xx} = (a'' + yv'')t_x^2 + (a' + yv')t_{xx} \\ f_{xy} = v't_x + (a'' + yv'')t_xt_y + (a' + yv')t_{xy} \\ f_{yy} = 2v't_y + (a'' + yv'')t_y^2 + (a' + yv')t_{yy}\,. \end{cases}$$

Ces expressions portées dans l'équation (1) conduisent à un trinôme du second degré en y dont l'annulation des coefficients conduit au système de trois équations

$$(5) \qquad \begin{cases} P(u'v'' - u''v') - QRu' = 0 \\ (Pa'' - 2Ru)u' + P(v'' - u''a') - QR(2v' + 1) = 0 \\ Pa'' - 2R(u + Qa') = 0 \end{cases}$$

où $P = 1 + u^2 + Q^2, Q = v - t/2$ et $R = v' - a'u'$.

Multiplions la première équation par $v'' - u''a'$, la deuxième équation par $v'u'' - u'v''$ et la troisième équation par $u'(u'v'' - v'u'')$ et faisons la somme. Nous obtenons alors l'équation

$$(6) \qquad QR^2[u'' - 2(u'v'' - v'u'')] = 0\,.$$

Trois cas sont à considérer: $Q = 0$, $R = 0$, ou $u'' = 2(u'v'' - v'u'')$.

3.2. Supposons que $Q = 0$, c'est à dire $v = t/2$. C'est le cas des surfaces réglées par les droites géodésiques de contact qui a été étudié aux paragraphes 2.3. et 2.4. (voir Théorème 3).

3.3. Supposons que $R = 0$, le système (5) s'écrit

$$\begin{cases} u'v'' - v'u'' = 0 \\ a''u' + v'' - u''a' = 0 \\ a'' = 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

Sachant que $v' = a'u'$ le système (7) équivaut alors à $a'' = 0$ c'est à dire $a(t) = \lambda t + \mu$ et $v(t) = \lambda u(t) + \xi$ avec λ, μ, ξ des réels et u une fonction quelconque. La solution correspondante s'écrit

$$\begin{cases} x(t,s) = t + su(t) \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = \lambda t + \mu + \lambda s u(t) + \xi s \end{cases}$$

c'est à dire $z = \lambda x + \xi y + \mu$ qui représente un plan.

3.4. Supposons que $u'' = 2(u'v'' - v'u'')$. Cette équation équivaut à $2u'v'' = u''(2v' + 1)$ dont les solutions sont

$$u' = 0 \quad \text{et} \quad v \text{ quelconque} \tag{8}$$

ou bien

$$u \text{ quelconque et } v(t) = \lambda u(t) + \mu - \frac{t}{2} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ réels}\,. \tag{9}$$

Le système (5) s'écrit maintenant

$$\begin{cases} Pu'' - 2QRu' = 0 \\ Pv'' - QR(2v' + 1) = 0 \\ Pa'' - 2R(u + Qa') = 0\,. \end{cases} \tag{10}$$

Dans le premier cas où u est constant, une rotation autour de l'axe $(0z)$ permet de se resteindre au cas $u = 0$. Le système (10) devient

$$\begin{cases} Pv'' - Qv'(2v' + 1) = 0 & \text{(11.a)} \\ Pa'' - 2Qa'v' = 0 & \text{(11.b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Pv'' - Qv'(2v'+1) = 0 & (11.a) \\ Pa'' - 2Qa'v' = 0 & (11.b) \end{cases}$$

L'équation (11.a) admet la solution particulière $v' = -1/2$ c'est à dire $v = -t/2 + \kappa$ où $\kappa \in \mathbb{R}$, pour laquelle l'équation (11.b) devient

$$(12) \qquad (1 + (t-\kappa)^2)a'' - (t-\kappa)a' = 0$$

dont les solutions sont

$$a(t) = \frac{\lambda}{2}[\tau\sqrt{1+\tau^2} + \text{Log}\,(\tau + \sqrt{1+\tau^2})] + \mu$$

avec $\tau = t - \kappa$, λ et μ des réels.

La surface minimale correspondante admet comme paramétrisation

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = a(t) + s(-t/2 + \kappa)\,. \end{cases}$$

Cette surface est le graphe de la fonction $z = a(x) + (\kappa - x)y/2$. L'isométrie $(0; -\kappa, 0, -\mu)$ permet de ramener cette surface au graphe de la fonction

$$z = \frac{\lambda}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \text{Log}\,(x + \sqrt{1+x^2})] - \frac{xy}{2}\,.$$

On retrouve donc les surfaces annoncées dans [B].

Considérons maintenant la solution générale v de l'équation (11.a), avec $v' \neq -1/2$. On vérifie facilement que $a(t) = \lambda(v(t) + t/2) + \mu$ avec λ, μ réels est la solutions générale de l'équation (11.b) car cette équationest linéaire en a et la solution proposée dépend de deux constantes arbitraires. La surface minimale correspondante admet comme paramétrisation

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = \lambda(v(t) + t/2) + \mu + sv(t)\,. \end{cases}$$

Cette surface est le graphe de la fonction $z = (\lambda + y)v(x) + \lambda\frac{x}{2} + \mu$.

L'isométrie $(0; 0, \lambda, -\mu)$ permet de ramener cette surface au graphe de la fonction $z = yv(x)$, où la fonction v est une solution de l'équation (11.a), c'est à dire vérifie

$$(1 + (v - x/2)^2)v'' - (v - x/2)(2v' + 1)v' = 0 .$$

Le changement de variable $v(x) = (r(x)+x)/2$ transforme cette équation en

$$r''(4 + r^2) - 2r(r' + 1)(r' + 2) = 0 .$$

On retrouve donc les surfaces minimales dans [B].

3.5. Il reste à considérer maintenant le cas donné par la relation (9). Le système (10) s'écrit

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} Pu'' + (1 + 2u'(a' - \lambda))Qu' = 0 \\ Pa'' + (1 + 2u'(a' - \lambda))(Qa' + u) = 0 \end{cases}$$

avec $P = 1 + y^2 + (\lambda u + \mu - t)^2$ et $Q = \lambda + \mu - t$.

La surface minimale correspondante admet comme paramétrisation

$$\begin{cases} x(t,s) = t + su(t) \\ y(t,s) = s \\ z(t,s) = a(t) + s(\lambda u(t) + \mu - t/2) \quad \lambda, \mu \text{ réels.} \end{cases}$$

L'isométrie $(0; 2\lambda, -2\mu, 0)$ permet de se ramener au cas $\lambda = \mu = 0$. En regroupant les résultat précédents on énonce le

THÉORÈME 4. *Les surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$ réglées par les droites sont à isométrie près de $\mathbb{H}_3$:*

I. Les morceaux de plans

II. Les morceaux du paraboloïde hyperbolique d'équation $\mathfrak{z} = xy/2$

III. Les morceaux d'hélicoïdes paramétrés par

$$x(t,s) = s\sin t, y(t,s) = s\cos t, \; z(t,s) = \gamma t; \gamma \textit{ réel non nul}$$

IV. Les morceaux de surfaces d'équation

$$z = \frac{\lambda}{2}[x\sqrt{1+x^2} + Log\,(x + \sqrt{1+x^2})] - \frac{xy}{2},\ \lambda \textit{ réel non nul}$$

V. Les morceaux de surfaces qui sont localement des graphes de fonction $z = \frac{1}{2}y(r(x) + x)$ *où r est une solution de l'équation*

$$r''(4 + r^2) - 2r(r' + 1)(r' + 2) = 0$$

VI. Les morceaus de surfaces qui sont paramétrisées localement par

$$x(t,s) = t + su(t), y(t,s) = s,\ z(t,s) = a(t) - st/2$$

avec u et a solutions du système

$$\begin{cases} (1 + u^2 + t^2)u'' - (1 + 2u'a')tu' = 0 \\ (1 + u^2 + t^2)a'' - (1 + 2u'a')(ta' - u) = 0 \end{cases}$$

3.6. Remarquons que les morceaux d'hélicoïdes ne sont réglés que par des droites géodésiques, tandis que les morceaux de plans et les morceaux du paraboloïde hyperbolique peuvent être réglés par des droites géodésiques et par des droites qui ne sont pas des géodésiques.

REFERENCES

[B] M. Bekkar, *Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg* $\mathbb{H}_3$, Rend. Sem Fac. Scienze Università di Cagliari **61**, 2 (1991).

[H] T. Hangan, *Sur les distributions totalement géodésiques du groupe nilpotent riemannien* $\mathbb{H}_{2p+1}$, Rendic. del Sem. della Fac. di Scienze dell'Univ. di Cagliari, **4** (1985), 5.

Mohammed BEKKAR, Laboratoire de Mathématiques, Université de Haute Alsace,
4 Rue des Frères Lumière, 68903 Mulhouse, France,
et Institut de Mathématiques, Université d'Oran-Es-Senia,
31000 Es Senia, Algérie.

Tewfik SARI, Laboratoire de Mathématiques, Université de Haute Alsace,
4 Rue des Frères Lumière, 68903 Mulhouse, France,
et Departement de Mathématiques, Université de Sidi Bel Abbes,
Rue Henri Poincaré, 22000 Sidi Bel Abbes, Algérie.

Pervenuto in redazione il 5.3.1992 e, in forma definitiva, il 7.7.1992.